Haute Ecole Pédagogique – BEJUNE

L'histoire des mathématiques : Un outil pour améliorer la numération et l'arithmétique ?

Master en pédagogie spécialisée - Volée 1619

Mémoire de Master de Manuelle Vagnières

Sous la direction d'Anne-Françoise de Chambrier

Bienne, avril 2019

LISTE DES GRAPHIQUES, DES TABLEAUX ET DES ANNEXES

Graphiques

Tableaux

Annexes

REMERCIEMENTS

Mes sincères remerciements vont

À Anne-Françoise de Chambrier pour son accompagnement motivant et ses conseils pertinents tout au long de ce travail

À Elisa et Jonas, mes enfants, qui se sont adaptés à mes nombreuses heures de lecture, d'écriture, de remise en question durant ces trois dernières années

À Cristèle, à Aude et à ma maman qui ont pris le temps de relire ce document et de me soutenir dans les moments de doute

À mes parents qui ont pris en charge les repas et les mercredis après-midi avec mes enfants pour me permettre de faire cette formation

RÉSUMÉ

Un bon nombre de chercheurs s'accordent sur le fait qu'il existe un parallèle entre l'évolution biologique du cerveau de l'être humain et le développement du cerveau de l'enfant, du bébé à l'âge adulte. Ainsi, les obstacles que l'humanité a rencontrés pour concevoir le concept de nombre se retrouvent dans la construction que l'enfant doit opérer pour en comprendre le sens et le représenter. Cette recherche se penche sur les effets de séquences didactiques à propos de l'histoire des mathématiques sur les compétences en numération et en arithmétique. Ces séquences didactiques, développées et adaptées pour des élèves de classe spécialisée, retracent les raisons du besoin de dénombrer et de compter de l'homme dès la préhistoire, puis expliquent l'apparition de notre système numérique décimal de position. Elles sont présentées à trois élèves de classe spécialisée et les compétences de ces élèves sont mesurées avant, pendant et après l'intervention. Les résultats de cette recherche sont encourageants. Les participants ont amélioré leurs compétences en numération et en arithmétique. L'enseignante a également constaté des effets positifs liés au fait de mieux connaître l'histoire des mathématiques, ce qui lui a permis d'enseigner cette branche de manière plus explicite.

MOTS CLÉS

Histoire des mathématiques – Phylogenèse / Ontogenèse - Numération – Arithmétique

Sens des mathématiques

1. INTRODUCTION

Quoi ? Les mathématiques ???

C'est avec étonnement et incompréhension que plusieurs personnes de notre entourage ont réagi en apprenant le titre de cette recherche. Etant donné la tendance plus littéraire que scientifique de l'auteur, cette réaction est compréhensible… Mais elle est aussi représentative d'un manque d'intérêt, voire parfois d'une peur face au domaine mathématique dans notre société. Faut-il être un vrai scientifique pour s'intéresser aux mathématiques ? Faut-il avoir « la bosse des maths » comme dirait Dehaene (2010) ? Nous pensons justement que non… et que chacun d'entre nous peut trouver de l'intérêt dans cette branche, pour peu qu'elle soit présentée de manière un peu moins rigide qu'elle ne l'est parfois dans les écoles. C'est pour cette raison qu'il nous a semblé intéressant de se pencher sur l'histoire des mathématiques… Finalement, pourquoi les hommes ont-ils eu besoin de savoir compter, et d'où viennent les chiffres que nous utilisons uniformément sur toute la planète ? Ces questions sont restées sans réponse durant toute notre scolarité, les signes mathématiques y étant présentés comme une évidence. Les chiffres ne pouvaient être représentés différemment, leur évolution n'était pas une possibilité dans nos têtes d'élèves.

Pourtant, au lycée, une enseignante a su nous passionner en physique, et cela grâce à l'histoire de ce domaine. En effet, en présentant les astronomes, leurs travaux, leur vision du monde parfois erronée, parfois visionnaire, mais propre à une époque et à une histoire… bref, en mettant un peu d'humanité dans ses cours, cette enseignante a ouvert une porte nouvelle.

Plus tard, dans notre formation d'enseignants spécialisés, c'est un film, « l'empire des nombres » (Truffault, 2001), qui a ouvert cette porte une seconde fois, mais dans un contexte lié aux mathématiques. Nous avons alors supposé qu'expliquer la naissance et l'évolution des nombres pourrait intéresser les élèves. Les premiers jalons de ce travail étaient plantés. En a découlé la découverte de chercheurs et mathématiciens (Ifrah, Meljac, Guedj), qui ont écrits divers ouvrages sur cette thématique.

Pourtant, à première vue, peu de littérature concernant les jeunes élèves (6-12 ans) ou les élèves de l'enseignement spécialisé existe, la plupart des ouvrages étant destinés à des élèves plus âgés (12-15 ans). Il n'en fallait pas plus pour titiller notre curiosité et avoir envie d'aller plus loin dans cette démarche de recherche.

2. PROBLEMATIQUE

2.1. Problème de départ

> L'usage des chiffres, 1,2,3,4,5,6,7,8,9,0 nous semble ordinaire et si évident que nous avons tendance à le considérer comme une aptitude innée de l'être humain […]. Il nous faut nous souvenir du dur apprentissage du maniement des nombres […] pour soupçonner qu'il s'agit en fait de quelque chose d'inventé et qui doit être transmis. (Ifrah, 1985, p.13)

Notre système numérique est le fruit d'une longue évolution dans le temps. Il est le résultat d'un lent processus qui a mené l'homme à chercher des réponses aux problèmes qu'il rencontrait. « L'histoire de la construction des nombres est jalonnée de tentatives de représentations plus ou moins adaptées aux contextes culturels et économiques » (Dias, 2018, p.103). Les nombres ont une histoire. Ils sont issus des essais et des expériences de nombreux chercheurs au fil du temps. Nous constatons que cette manière d'approcher les mathématiques est rarement abordée dans les écoles de Suisse romande. Si quelques enseignants passionnés se sont renseignés sur l'histoire des mathématiques et la transmettent à leur manière, ce sujet reste largement méconnu et par conséquent très peu utilisé en classe. Bien qu'il soit mentionné que l'approche du nombre puisse se faire « par la découverte de différents systèmes de numération présents ou passés » dans le plan d'études romand, PER (CDIP, 2010), ce dernier ne fait pas autrement allusion à l'enseignement d'une matière en la replaçant dans son contexte historique. Au Québec, par contre, c'est une vision de l'apprentissage qui est inscrite dans le programme de formation de l'école.

> Par ailleurs, chaque discipline est porteuse de culture tant par son histoire que par les questionnements particuliers qu'elle suscite. Aussi importe-t-il que l'élève comprenne l'origine des disciplines enseignées, les problématiques qu'elles abordent, les types de questions auxquelles elles s'efforcent de répondre et les démarches qu'elles utilisent afin de pouvoir s'y référer à bon escient. (Québec (Province) & Ministère de l'éducation, 2006, p.4)

Cette manière d'envisager les savoirs est bien présente dans les objectifs spécifiques du domaine des mathématiques du programme de formation québécois.

Ces postures différentes nous interrogent. Replacer une matière dans son contexte historique peut-il apporter un éclairage à l'élève ? En quoi l'histoire d'une matière, dans notre cas les

mathématiques, peut-elle amener du sens ou de la motivation aux élèves ? Qui s'est penché sur ce sujet et qu'en est-il ressorti ?

D'une part, nous allons tenter, dans ce travail, de découvrir en quoi consiste l'histoire des mathématiques et plus particulièrement l'histoire des nombres, en lien avec les apprentissages des élèves. Nous allons voir comment elle figure dans les programmes scolaires et dans les moyens d'enseignement de certains pays francophones, pour de jeunes élèves.

D'autre part, grâce à des séquences didactiques portant sur l'histoire du nombre – développées pour des élèves de l'enseignement spécialisé – nous allons mesurer si ces séquences permettent aux élèves de développer leurs compétences numériques et le sens qu'ils voient dans les mathématiques.

Nous formulons donc ainsi notre question de départ : Est-ce que travailler sur l'histoire des mathématiques dans le cadre de l'enseignement spécialisé donnerait plus de sens à cette branche ? Est-ce que cela aiderait les élèves à se représenter le nombre et le système de numération ?

3. APPORTS THÉORIQUES

3.1. L'histoire des mathématiques

L'histoire des mathématiques est vaste. Nous allons ici traiter uniquement des étapes historiques que nous pensons liées aux apprentissages scolaires autour du concept de nombre. En effet, nous nous basons sur l'idée qu'un lien existe entre les étapes qu'ont dû franchir les hommes (l'humanité) pour conceptualiser, concevoir le nombre et les difficultés auxquelles les élèves se heurtent dans l'apprentissage des mathématiques. Ce postulat s'appuie sur un courant de pensée étayé par de nombreux chercheurs, en particulier dans le domaine du développement neurocognitif. Il s'agit de faire le rapprochement entre le développement de l'intelligence animale et humaine (*phylogenèse*) au fil du temps et le développement de l'intelligence du bébé à l'âge adulte (*ontogenèse*) sur un court laps de temps : les vingt premières années de vie. « Etudier l'évolution des comportements de l'enfant revient dès lors à étudier la science en marche du bébé à l'adulte […] C'est une forme d'histoire des sciences (dont l'enfant est l'acteur principal) qui s'opère en un raccourci saisissant (à peine vingt ans) » (Houdé, 2019, p. 229). L'astrophysicien Hubert Reeves ajoute que c'est le psychologue suisse Jean Piaget (1896-1980) qui a été l'un des premiers à amener la dimension historique dans l'étude de l'acquisition des connaissances.

En mathématiques, représenter le rien par le signe zéro, par exemple, a mis du temps à apparaître dans l'histoire de l'homme et c'est également une notion que les élèves ont du mal à comprendre et à utiliser. On peut supposer que l'enfant doit d'abord passer par les premiers stades de la conception du nombre pour ensuite arriver à comprendre cette notion de représentation du vide. « Ainsi, toute question psychologique est susceptible de trouver un éclairage, une réponse, sur un temps qui varie de millions d'années à des fractions de secondes » (Houdé, 2019, p.407).

Dans cette recherche, nous postulons, de manière analogue, que de nombreuses difficultés des élèves en mathématique pourraient trouver un éclairage en prenant en considération l'évolution de cette matière dans l'histoire de l'humanité. Il s'agit donc ici d'emboîter ces deux échelles temporelles. L'une s'étirant sur des milliers d'années et liée à l'évolution biologique de l'espèce. L'autre étant beaucoup plus courte et liée au développement de l'être humain de la fécondation à l'âge adulte.

L'homme est passé par une série d'étapes différentes pour utiliser le nombre tel qu'on le connaît aujourd'hui. Il a dû contourner des obstacles, simplifier des idées ou des gestes comptables. « Il est remarquable de constater que ces obstacles se retrouvent dans le

développement cognitif de l'élève à propos de la construction du concept de nombre : la représentation, puis l'abstraction, et enfin la communication et la mémorisation » (Dias, 2018, p.107). Ces étapes sont en effet significatives lors du développement des compétences mathématiques. Souvent de manière implicite, elles sont travaillées en classe pour permettre à l'enfant de comprendre le système numérique.

Afin d'approfondir la compréhension de ce système, nous allons développer d'un point de vue historique les grandes étapes mathématiques qui ont marqué un tournant dans l'évolution et faire ensuite des liens avec les acquisitions qu'effectuent les élèves.

3.1.1. Le dénombrement

Il s'agit ici de la représentation d'une quantité, sans pour autant l'exprimer à l'aide de chiffres. Comme le dit Guedj (1996), au Paléolithique, les hommes durent apprendre à conserver les nombres comme ils apprirent à conserver le feu. Pour garder une trace de la quantité, on fit des marques, des entailles sur du bois ou de l'os. Imaginons un berger qui garde un troupeau de moutons. Ce berger ne connaît pas les chiffres. Il sait qu'il a beaucoup de moutons mais ne sait pas encore les compter. Pour contrôler s'il a le même nombre de moutons le matin que le soir, il doit inventer une technique de comptage, de vérification. L'homme préhistorique a alors fait des mathématiques sans en avoir conscience : il a fait correspondre à chaque mouton une entaille (sur un os ou sur une corne). En faisant entrer les moutons dans un enclos il a marqué d'une entaille chaque passage. Il a fait de même le lendemain en sortant les moutons de l'enclos, en plaçant cette fois un doigt sur l'encoche. S'il manquait un mouton, il s'en apercevait car une encoche restait apparente après le passage des moutons. Si une brebis avait mis bas durant la nuit et qu'un nouvel agneau faisait désormais partie du troupeau, il s'en apercevait aussi car il manquait une encoche.

Bois de renne entaillé datant du paléolithique (Guedj, 1996, p.16)

Dans le même but, des hommes sous divers cieux ont également utilisé des coquillages, des perles, des fruits durs, des ossements, des bâtonnets, des boulettes d'argile, des graines de cacao, des crottes séchées, même, dont

> ils faisaient des tas ou des rangées correspondant à la quantité d'êtres ou d'objets qu'ils voulaient dénombrer. (Ifrah, 1985, p.34)

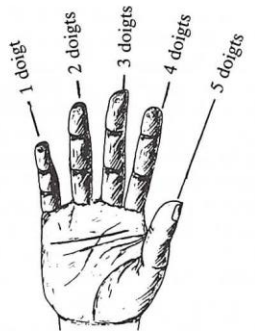
Ainsi chaque peuplade a trouvé un moyen de dénombrer en associant une chose à un symbole par la correspondance unité par unité (une entaille = un mouton). En pédagogie, on nomme cette action le dénombrement par comptage (Charnay, 2013) ou le comptage terme à terme. L'enfant utilise cette procédure lorsqu'il apprend à compter de petites et moyennes quantités.

L'entaille a été une manière d'indiquer une quantité, mais les hommes se sont aussi servis des parties du corps pour dénombrer. Ils ont utilisé les doigts de la main mais également les bras, la tête, le torse, les jambes, les pieds et les orteils. Ces parties du corps étaient énumérées toujours dans le même ordre. L'homme a ainsi créé le premier système de numération, en ajoutant successivement une partie du corps après l'autre de manière ordinale, pour arriver à une somme totale. Sans utiliser de chiffre, pointer le nez ou le poignet lui permettait de désigner une quantité et de communiquer avec d'autres hommes utilisant le même système. Cette action peut être mise en relation avec l'apprentissage de la chaîne numérique chez l'enfant (l'énumération des mots-nombres, toujours dans le même ordre) et la compréhension que le dernier mot-nombre prononcé représente la quantité totale des objets.

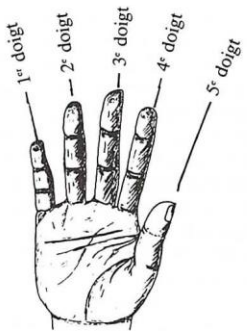
Ces deux facettes du dénombrement : le comptage ordinal, avec des mots énumérés toujours dans le même ordre et la compréhension de la quantité, la représentation cardinale, sont les piliers de l'arithmétique. Les élèves doivent comprendre, souvent de manière implicite, ces deux aspects du nombre pour se le représenter.

L'illustration suivante permet de se faire une image plus précise de ces deux aspects complémentaires du nombre :

Aspect cardinal



Aspect ordinal



Ifrah, 1994, p.67

> La main de l'homme se présente donc comme la « machine à compter » la plus simple et la plus naturelle qui soit. Et c'est pour cette raison qu'elle

> jouera par la suite un rôle considérable dans la genèse de notre système de numération. (Ifrah, 1994, p.68)

L'Homme, en distinguant la valeur cardinale et ordinale du nombre arrive peu à peu vers le concept d'abstraction du nombre. En effet, il peut désormais désigner une collection hétérogène (plusieurs objets ou animaux différents les uns des autres). Il utilise du matériel (cailloux, coquillages, entailles, …) comme symbole numérique pour représenter cette quantité.

Il est alors confronté à un nouveau problème : celui du dénombrement de grandes quantités. En effet, transporter des centaines de cailloux lors des transhumances, ou trouver des os ou des bois assez longs pour faire autant d'entailles que de bêtes devient compliqué et peu pratique. C'est alors qu'une idée géniale naît : utiliser différents symboles pour représenter différentes quantités et par conséquent, désigner des nombres élevés avec le moins possible de symboles.

3.1.2. L'invention de la base

C'est petit à petit que cette échelle de valeur des nombres s'est mise en place pour finalement faire naître divers systèmes de numération. On peut la définir comme « un système dont la « base » n'est autre que le nombre d'unités qu'il est nécessaire de grouper à l'intérieur d'un ordre donné pour former une unité de l'ordre immédiatement supérieur » (Ifrah, 1994, p.73). En d'autres mots, c'est une manière de grouper un certain nombre d'unités, pour représenter un nombre plus grand. On peut alors représenter le nombre de manière écrite (un cône= une unité / dix cônes = une dizaine = une boule) ou orale, quand le mot diffère selon son rang (un /dix /cent).

Plusieurs systèmes numériques font leur apparition à travers le monde déjà 4000 ans avant J.-C. En voilà quelques exemples connus : le système sexagésimal (base soixante : 60 unités = une soixantaine) utilisé par les Babyloniens et les Sumériens, le système vigésimal (base vingt : 20 unités = une vingtaine) utilisé par les Amérindiens et les Celtes, ou encore, le système décimal (base dix : 10 unités = une dizaine) utilisé par les Indiens et les Sémites environ 2000 ans avant notre ère. On peut penser que le système décimal, qui a pris le dessus sur les autres, a été dicté de manière naturelle, biologique, par le nombre de doigts de nos deux mains. Parti de l'Inde aux alentours du Ve siècle, passant dans les mains des Arabes, puis, après un millénaire, dans celles des Espagnols et des Italiens, il s'est finalement propagé sur toute la planète. Toutefois, en ce qui concerne le système métrique, il est étonnant de

noter que ce n'est qu'en 1795 qu'une loi sur l'uniformisation du système de mesure à base décimale a été votée en France. Avant cela, on comptait en coudes et en pieds.

De plus, nous avons dans notre quotidien des restes de la base sexagésimale des Babyloniens, dans le calcul du temps par exemple. Il faut soixante secondes pour faire une minute, puis soixante minutes pour arriver à une heure. La base soixante se retrouve aussi dans le calcul des angles et des coordonnées géographiques.

En classe, un travail sur les différentes bases faisait partie du programme d'enseignement des mathématiques dans les années 1970. Selon Charnay (2013) il s'est avéré que cet enseignement était peu efficace car il n'était compris que par les bons élèves. Ceux qui avaient des difficultés ne pouvaient pas transférer leurs connaissances d'une base à l'autre. Cet enseignement a donc été naturellement abandonné. Se focaliser directement sur la base dix, de manière explicite est beaucoup plus efficace pour aider les élèves à se structurer et à saisir ce concept.

Pour l'enfant, comprendre le système décimal joue un rôle essentiel pour utiliser de nombreuses techniques, notamment en comparaison de nombres ou en calculs. Selon Charnay (2013, p.50), il s'agit d'une connaissance fondamentale, nécessaire pour construire d'autres connaissances mathématiques.

3.1.3. L'invention des chiffres

> Avec l'acquisition du principe de la base d'un système de numération, on peut alors faire preuve d'imagination. Certaines cultures imaginèrent ainsi de remplacer les habituels cailloux par des pierres de dimension variée, en leur attribuant, selon leurs tailles respectives, des ordres d'unités différents. (Ifrah, 1994, p.234)

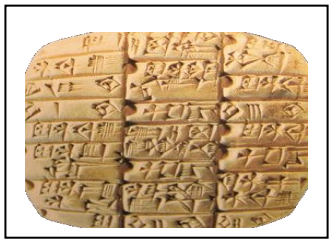
Pour l'unité, on prenait un petit caillou, pour la dizaine un caillou un peu plus gros, pour la centaine un caillou encore plus gros et ainsi de suite… Les pierres de bonne grandeur n'étant pas toujours faciles à trouver, les hommes ont contourné le problème en fabriquant des jetons d'argile, de taille différente, du nom de calculi. Il a été ainsi plus facile de fabriquer des jetons de grandeur et de forme proportionnelles à leur valeur. Cette pratique conduira finalement à l'apparition de la pièce de monnaie, comme moyen comptable puis comme moyen d'échange.

Lors de différentes transactions, les Babyloniens (IVe siècle av. J.-C.) mettaient dans une grande bulle d'argile un certain nombre de calculi, représentant une quantité d'objets ou de bêtes, puis marquaient sur la grande bulle la valeur contenue à l'intérieur.

Bulle d'argile et calculi. Cette bulle contenait 7 calculi : 3 ronds, 3 petits cônes et un grand cône percé qui sont représentés sur la surface de la bulle (Guedj, 1996, pp.28,29)

« Ce système comptable n'est cependant pas très commode puisqu'il faut casser la bulle à chaque fois qu'on veut retrouver le total de son contenu » (Ifrah, 1985, p.134). On se rend alors compte qu'il est possible de garder les symboles graphiques désignant la valeur contenue dans la bulle et de les transférer sur des pains, des plaques d'argile. Dès lors, plus besoin de briser la bulle pour compter son contenu, on peut lire les informations écrites sur les plaques d'argile. Les bulles et les calculi n'ont alors plus lieu d'être et sont remplacés petit à petit par les tablettes d'argile d'abord de forme ovale, arrondie, puis au fil du temps de forme rectangulaire et plus fine. C'est à ce moment-là que l'homme arrive à la représentation d'une quantité sous forme symbolique, graphique. Ce ne sont pas encore des chiffres qui désignent la valeur mais des idéogrammes. Ces marques sont néanmoins de véritables signes numériques, ce sont effectivement les ancêtres des chiffres, des instruments de communication.

Tablette de terre cuite constituée de pictogrammes nombres (Guedj, 1996, p.32)



Cette étape est largement exercée dans les petits degrés, quand les élèves apprennent par exemple à associer un symbole écrit (chiffre) à une quantité ou à différencier les chiffres les uns des autres.

3.1.4. Les chiffres indo-arabes, leur valeur positionnelle et le zéro

Les systèmes de numération ayant été développés dans différentes civilisations n'ont pas résisté au génie des chiffres arabes. En effet, des systèmes comme les chiffres romains ou grecs manquaient de cohésion et rendaient impossibles les opérations sur de grands nombres. Ils ont donc été abandonnés au profit des chiffres arabes, ou plutôt indo-arabes, car c'est en Inde que les dix signes que nous utilisons pour compter ont été inventés.

Evolution de la graphie des chiffres (mars 2019). Dans *Wikipédia l'encyclopédie libre*.

Arabe/Latin	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Arabe oriental (hors persan et ourdou)	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
Indien, Devanagari	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९
Indien, Gujarati	૦	૧	૨	૩	૪	૫	૬	૭	૮	૯

« Partis du Moyen-Orient, les chiffres indiens se sont tout naturellement répandus dans l'empire arabe. […] Dans ces contrées, les chiffres ont pris une forme différente de la forme hindi des chiffres originels en usage en Orient » (Guedj, 1996, p. 51). Ce sont ensuite les Arabes, en arrivant en Espagne, qui permettront aux peuples de l'Europe de connaître et d'utiliser ce système de numération si simple et performant.

Le système de valeur positionnelle des chiffres, déjà présent dans différents systèmes précédents, a pris forme, tel que nous le connaissons, en Inde. Les savants indiens ont eu l'idée d'exprimer oralement non seulement le nom des chiffres mais également le nom de la dizaine, de la centaine, du millier. Ils pouvaient ainsi dire des grands nombres facilement. Seul problème : le manque du nombre, « le vide » n'est pas encore représenté. Selon Guedj (1996), les chiffres de un à neuf ont été inventés en Inde au IIIe siècle av. J.-C. Le principe de position incluant le zéro apparait pour la première fois dans un traité de cosmologie au Ve siècle de notre ère, en Inde également. Dans ce nouveau système, ces deux notions deviennent étroitement liées. Le principe de position permet à chaque chiffre d'avoir une valeur différente selon son emplacement (dans 2, le 2 représente les unités, dans 20, il représente les dizaines et ainsi de suite). Le zéro est donc inséparable du principe de position car il faut pouvoir exprimer qu'il n'y a pas d'unité, pas de dizaine, … « Autre avantage de cette écriture : le lien qu'elle établit entre la longueur du nom et la taille du nombre. Plus le nom est long, plus le nombre est grand » (Guedj, 1996, p.48). En effet, si on pense au système des chiffres romains, 1000 s'écrit « M » alors que 999 s'écrit « CMXCIX ». La clarté du système indien est indiscutable. Le nombre est, d'une part, représentatif de la quantité qu'il évoque, et d'autre part, il est utilisable facilement pour calculer.

Les neuf chiffres nommés de manière distincte, la découverte du « vide », du zéro, liée au principe de position permettent au système indien de s'imposer car il est le plus simple et le plus pratique de tous les systèmes inventés jusqu'alors.

En classe, la valeur positionnelle des chiffres est travaillée à travers des tableaux de numération (centaines, dizaines, unités) ou de matériel de manipulation comme le boulier, l'argent ou le matériel multibase. Comprendre ce système permet à l'élève d'entrer dans le

monde des grands nombres, de pouvoir les écrire et les dire, puis de les utiliser dans des problèmes arithmétiques.

En conclusion, on peut dire que le défi de cette histoire des nombres a été finalement de trouver un système extrêmement simple (neuf signes et le zéro) pour exprimer des nombres extrêmement grands (grâce au principe de position). Comme le dit Guedj (1996, p.36), le système indien est le meilleur car il a la capacité de « faire avec peu beaucoup ».

3.2. Regard sur les moyens d'enseignement en lien avec l'histoire des mathématiques

Dans l'enseignement, les mathématiques sont généralement présentées comme un produit fini, comme un état de fait qui a toujours existé tel quel. Le dénombrement, le principe de la base, les chiffres ou encore les opérations sont enseignés aux élèves par divers moyens, plus créatifs les uns que les autres. Pourtant, peu de moyens d'enseignement proposent le chemin de l'histoire pour travailler certaines notions avec les élèves.

En Suisse romande, dans le PER (CDIP, 2010), au cycle 1 (élèves de 6 à 8 ans), on peut lire que « les élèves rencontrent deux obstacles épistémologiques importants : l'écriture de position et la signification de la position des chiffres, et la signification et le rôle du zéro ». Il est ajouté à cela que l'enseignant peut « pour aider à surmonter ces obstacles, recourir à des supports tels que : doigts, bande numérique, droite graduée, tableau des nombres, boulier, réglettes ». C'est donc ici par la manipulation du matériel que l'élève pourra surmonter ces obstacles. Toujours dans le PER, au cycle 2 (élèves de 8 à 12 ans), on trouve un seul objectif en lien avec notre thématique pour se représenter le nombre : « explorer différentes écritures de nombres et différents systèmes de numération, présents ou passés ». Cet objectif est mis en lien avec l'histoire (préhistoire) mais ne fait pas mention explicitement de l'histoire des mathématiques. Au cycle 3 (élèves de 12 à 15 ans), les références à différents systèmes de numérations sont plus nombreuses et plus précises (Rome, Egypte, Babylone). Les difficultés des élèves lors de la découverte du système de numération sont donc nommées dans le PER, mais le lien avec des exemples concrets de l'histoire des mathématiques n'est vraiment présent qu'au cycle 3. Les intentions globales de ce programme ne font pas mention de l'histoire pour entrer dans les connaissances.

En France dans le Socle commun de connaissances, de compétences et de culture (2015), il n'existe, selon nos recherches, aucune précision concernant l'utilisation de l'histoire des mathématiques. Le programme de formation français se fonde plutôt sur l'observation, la manipulation et l'expérimentation pour travailler ce champ de compétence. Les IREM (instituts

de recherche sur l'enseignement des mathématiques) font eux référence à l'histoire des mathématiques, en particulier pour de grands élèves (15 ans et plus). Etonnamment, ce courant pourtant présent dans les instituts n'est pas spécifiquement inscrit dans le Socle commun français.

Dans le programme de formation de l'école québécoise (PFEQ, 2006), on considère l'histoire des mathématiques comme un outil intéressant qui amène du sens. On y postule que « pour comprendre cette évolution [des mathématiques], il convient de replacer les développements de la mathématique, les découvertes scientifiques et les réalisations technologiques dans leur contexte historique, social, économique et culturel » (p.122). Dans le chapitre des compétences liées au raisonnement à l'aide de concepts et de processus mathématiques, un des objectifs pour l'élève est de : « lier quelques éléments de l'histoire de la mathématique à certaines notions vues en classe » (p.129). Cette idée de donner du sens par l'histoire est ici encore mise en exergue. On constate que l'Ecole québécoise a pris officiellement le parti de tenir compte de l'histoire des mathématiques dans son programme scolaire, au contraire de l'Ecole suisse romande qui effleure le sujet ou de l'Ecole française qui ne la mentionne pas.

Selon les concepteurs québécois, replacer les concepts étudiés dans un contexte historique donne une vision plus large à l'élève, lui permet de réaliser que ce qu'on lui enseigne n'est pas tombé de nulle part mais a été conçu par des hommes curieux et inventifs. On peut imaginer que cette réflexion permet à l'élève de se sentir partie prenante d'une réflexion, d'un processus construit par des hommes avant lui.

> Sur un autre plan, l'introduction d'une dimension historique dans l'enseignement de la mathématique constitue une excellente façon d'en rehausser le niveau culturel. C'est l'occasion pour les élèves de percevoir l'évolution, le sens et l'utilité de cette discipline et de découvrir que cette évolution et la création de certains instruments tels que la règle, le boulier, le rapporteur, la calculatrice sont directement ou indirectement liées à des besoins pratiques apparus dans les sociétés. (PFEQ, p.125)

Cette perspective rendrait-elle les mathématiques plus humaines et accessibles ?

Georges Ifrah, largement cité dans ce travail, était enseignant de mathématiques en France. Il est l'un des premiers à effectuer des recherches sérieuses sur l'histoire des chiffres, dans les années 1980. C'est en ne pouvant répondre aux interrogations « naïves » de quelques élèves sur l'histoire des mathématiques « d'où viennent les chiffres ? » et « qui est-ce qui a inventé le zéro ? » (Ifrah, 1994, p. 1) qu'il décide de quitter son travail d'enseignant et de dédier son énergie à la recherche sur l'évolution et la signification des chiffres et des nombres dans le monde. Dans son ouvrage « Histoire universelle des chiffres » (1994), il décrit le processus

évolutif du nombre et plus précisément des chiffres au niveau conceptuel et au niveau graphique. Il observe également plusieurs manières de compter, dans des pays et des ethnies différentes. Il laisse avec cet ouvrage une trace scientifique solide sur l'histoire et l'évolution des mathématiques.

Plusieurs enseignants, en particulier des enseignants du cycle 3 et plus, vont alors utiliser l'histoire des mathématiques dans leur pratique.

> L'enseignement des mathématiques connaît à la fin des années 1960, ce que l'on appelle la réforme des mathématiques modernes. […] Malgré les excellentes intentions des promoteurs, cette réforme se traduira par un enseignement dogmatique qui présente aux élèves un *produit fini*. […] L'histoire des mathématiques devient alors le moyen de changer l'image des mathématiques […] L'histoire permet de voir les mathématiques non comme un produit achevé mais comme un *processus intellectuel*, non comme un langage mais comme *une activité.* (Barbin, 1997, p.20)

Selon ces enseignants, l'histoire amènerait donc une dimension plus dynamique et plus vivante à l'enseignement des mathématiques. Elle amènerait l'élève à considérer le chemin parcouru tout autant que le résultat. Et c'est en liant ces deux aspects ; le chemin et le résultat, que l'élève pourrait lui aussi prendre une posture de chercheur.

A la question pourquoi l'histoire des mathématiques serait intéressante à aborder en classe, Barbin (1997, p.21), répond en décrivant trois fonctions distinctes de cet outil :

1. Une fonction vicariante : on parle là d'une fonction de remplacement qui permet de comprendre les mathématiques comme une activité et non comme un corpus scolaire.
2. Une fonction dépaysante : qui permet à l'élève de s'étonner de ce qui va de soi. Bien souvent dans l'enseignement, tout se passe comme si les concepts étaient déjà là et ils sont manipulés sans questionnement sur leur construction. L'histoire nous rappelle que les concepts ont été inventés, et que cela ne va pas de soi.
3. Une fonction culturelle : qui permet de situer la production mathématique dans la culture scientifique et technique d'une époque. C'est une histoire dans l'histoire.

Ces travaux soulignent encore l'intérêt que pourrait représenter l'enseignement de l'histoire des mathématiques pour les élèves.

Comme mentionné ci-dessus, les Québécois ont pris en compte cette dimension de manière officielle. Par contre, dans les faits, cette évolution n'est pas si évidente car elle demande une modification profonde des moyens d'enseignement et de la manière de transmettre les notions.

Charbonneau (2006) postule que si la formation de base ne donne pas des outils aux enseignants, il leur sera très difficile d'amener ce point de vue historique en classe. En effet, comme l'a vécu Ifrah, comment transmettre des connaissances lorsqu'on ne les maîtrise pas ? Comment se sentir à l'aise dans son enseignement lorsque la matière même ne nous a pas été transmise ? C'est justement là le dilemme des enseignants québécois qui ont vu arriver dans leur programme d'enseignement les mathématiques du point de vue historique.

> Le Québec a entrepris, il y a quelques années de modifier l'ensemble de ses programmes de formation d'élèves. […] Ce nouveau programme repose sur une organisation donnant priorité aux compétences plutôt que simplement aux contenus. Dans ce contexte, les éléments de contenus sont associés à des repères culturels à l'intérieur desquels l'histoire des mathématiques occupe une place importante. (Charbonneau, 2006, p.1)

Il ne suffit toutefois pas de nommer des compétences dans un programme scolaire pour changer les choses. Le soutien aux enseignants, leur formation, doivent être mis en place afin de leur donner des outils concrets et utilisables pour aborder ces sujets nouveaux à large échelle.

Charbonneau (2006) souligne, dans ses ouvrages, la dimension humaine que l'histoire amène aux mathématiques. Il soutient que replacer les mathématiques dans un contexte social peut aider les élèves à mettre du sens sur les apprentissages et mieux apprécier cette branche. Mais il est également conscient des réticences des enseignants et de leur difficulté à trouver du matériel pédagogique pertinent.

Retenons, pour terminer cette partie sur l'histoire des mathématiques en lien avec l'enseignement, la citation suivante :

> Introduire une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques nous semble intéressant à au moins deux points de vue. Pour le professeur, l'histoire des mathématiques lui permet de prendre du recul par rapport à son enseignement et de redonner du sens à ce qu'il enseigne. Pour l'élève, découvrir que les mathématiques sont une construction d'hommes qui s'inscrit dans le temps peut l'amener soit à enrichir la vision qu'il a des mathématiques, soit à modifier l'image - parfois négative - qu'il s'en fait. (IREM Poitiers, 2008)

3.3. Littérature existante pour la pédagogie

Quelques auteurs ont produit des ouvrages permettant de transmettre l'histoire des mathématiques aux enfants. L'ouvrage « Qui donc a inventé les mathématiques » (Meljac,

2011) propose un texte qui s'adresse à un jeune public et qui explique de manière simple l'évolution du nombre, des techniques de calcul et des nombreux systèmes de numération. Il y est décrit la naissance du zéro et les différents moyens de compter, en passant des tablettes d'argile aux chiffres romains. Cet ouvrage donne des réponses accessibles aux enfants. Il introduit les notions de manière simplifiée et ludique. Ce livre est une entrée intéressante dans l'histoire des mathématiques. Pourtant, il est difficile de le lire tel quel à des élèves, car le vocabulaire utilisé est parfois complexe et l'ouvrage manque globalement d'illustration pour se faire des représentations mentales. Il y manque également des activités de manipulation qui pourraient aider les élèves à vivre corporellement les étapes successives de l'histoire et se les approprier. Bien que Meljac ait mené de nombreuses recherches dans le cadre des apprentissages mathématiques et soit une experte en la matière, il n'existe actuellement pas d'étude sur le lien entre l'impact de la lecture de cet ouvrage et les performances ou la motivation des élèves.

Avec « Les chiffres et les lettres en 35 expériences » (Nessmann, 2010), l'auteur propose de courtes explications sur l'histoire des mathématiques mises en relation avec des exercices pratiques. Il traite autant de l'histoire de l'écriture que de l'histoire des chiffres. Il met en parallèle ces deux évolutions et les entremêle. Cet ouvrage est intéressant car il permet à l'enfant de faire des liens entre l'histoire d'une notion et sa présence dans notre vie quotidienne par des expériences pratiques et des réflexions. L'une des séquences didactiques proposée s'intitule « et si un jour… il n'y avait plus de chiffres… ». Il s'agit d'un dialogue entre deux enfants :

- Les hommes préhistoriques ne connaissaient pas les chiffres. Ils en avaient de la chance !
- De la chance ? Imagine ce que ce serait de vivre sans chiffre...

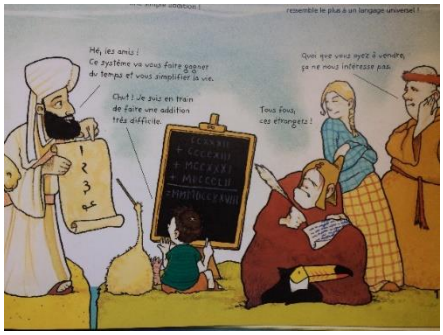
Il en découle une série de conséquences pratiques comme par exemple la difficulté pour faire des équipes de nombre égal au foot, puis l'impossibilité de compter les points. En faisant réfléchir sur les chiffres romains (leur utilisation encore actuelle pour les siècles ou les cadrans des horloges), sur l'évolution de la machine à calculer (du boulier à la calculette) ou sur des nombres particuliers (les nombres négatifs), il crée des ponts entre passé et présent. C'est un ouvrage qui peut permettre de lancer une réflexion sur l'histoire des nombres en classe par exemple et de faire quelques expériences pratiques en lien avec ce sujet.

« Compter le monde » (Cauvet, 2012) est un livre qui se penche sur chaque chiffre en y associant une peinture, une couleur, une carte, ... Ce type d'ouvrage est assez courant. Nous avons choisi de le nommer car son originalité réside dans le fait que l'auteure s'est inspirée des recherches d'Ifrah pour retracer de manière artistique et créative une brève histoire des

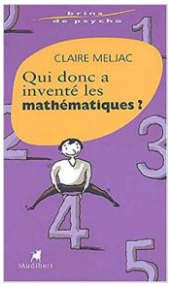
mathématiques. Le texte est agrémenté de citations qui amènent un éclairage historique solide.

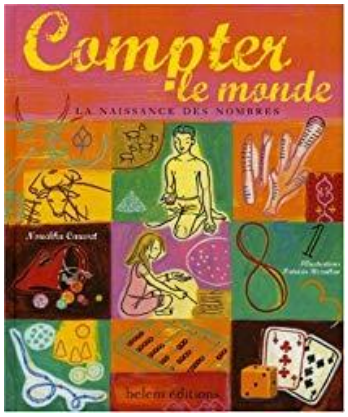
« L'histoire des chiffres de Zéro à dix » (French & Collins, 2001) est un ouvrage anglophone.

Illustration représentant Gerbert d'Aurillac, qui deviendra le pape Sylvestre II et qui, malgré son rang, ne put imposer le système de numération indien aux conservateurs européens. Ce ne sont que plusieurs siècles plus tard que les négociants décidèrent, pour se simplifier la vie, d'abandonner le système romain au profit du système indien… (French & Collins, 2001)



Il retrace l'histoire des chiffres et des nombres de manière pointue et pourtant accessible à un public adolescent grâce à des illustrations type bande dessinée. Il expose de manière ludique les enjeux des découvertes faites par les mathématiciens ainsi que les positions parfois réticentes d'une certaine frange de la population.





Quelques couvertures d'album cités ci-dessus

Notons également que dans ses grands récits, Montessori (1870-1952) a accordé un pan à l'histoire des nombres, retraçant de manière assez similaire à cette recherche, le contexte historique de la naissance des nombres. Basé sur ces principes, le livre « L'histoire des nombres » (D'Esclaibes, 2018) a été édité dernièrement. On y trouve des activités à faire en classe, pour aider les enfants à découvrir l'histoire des nombres, depuis les outils utilisés par les premiers bergers aux différents systèmes de numération, en débouchant finalement sur le code binaire et son utilisation dans l'informatique.

En conclusion, nous avons pu remarquer que malgré le fait que l'histoire des mathématiques ne soit pas d'usage ordinaire dans les écoles de Suisse romande, il existe une certaine quantité d'ouvrages pédagogiques à ce sujet. Selon nos recherches, c'est un courant relativement à la mode dans les librairies depuis les années 2000.

3.4. L'acquisition du concept de nombre

3.4.1. Habiletés numériques chez les bébés

Depuis les années 1980, des chercheurs se sont penchés sur l'acquisition du nombre chez les jeunes enfants. Il s'est avéré que même à quelques mois de vie, le bébé est capable de différencier une petite quantité d'une autre. On peut donc en déduire que l'être humain a, déjà très tôt, une représentation du nombre ou autrement dit, le sens du nombre.

> Tout commence donc à la naissance, où l'on observe déjà d'excellentes capacités de discrimination numérique. Le nouveau-né distingue à l'œil nu deux objets de trois, voire trois de quatre, et son oreille affûtée repère la différence entre deux et trois sons. Son cerveau semble prééquipé de détecteurs numériques probablement mis en place avant la naissance. L'information nécessaire à cet effet est probablement inscrite dans notre patrimoine génétique. (Dehaene, 2010, p.69)

Cette capacité à estimer très rapidement et de façon précise une toute petite quantité (de 1 à 3 objets clairement exprimés) s'appelle le subitizing. Le processus exact qui permet au bébé de différencier une petite collection d'une autre est encore étudié et discuté.

Ce qui ressort de recherches récentes, c'est que le bébé a des capacités de reconnaissance des nombres inscrites dans ses gènes. Ces informations, confirmées grâce aux progrès des techniques d'imagerie cérébrale, ont chamboulé une vision de l'enfant plus constructiviste, postulant que le bébé construit ses connaissances mathématiques par l'observation et l'internalisation (vision piagetienne). On imagine dans cette conception que l'enfant nait avec un cerveau vierge, tel une page blanche, et qu'il ne peut se construire une logique, un sens mathématique qu'en passant par l'expérimentation, après avoir mis en place le langage.

Il est par ailleurs intéressant de noter que tout comme le jeune enfant est capable de percevoir les petites quantités, les peuples dits « primitifs » ont également eu cette intuition sur les petits nombres. En effet, dans presque toutes les civilisations, les chiffres 1, 2 et 3 ont été représentés par des barres (I, II, III). Ce n'est qu'en dessus de 4 que les signes utilisés ont été arbitraires. « Des dizaines de sociétés humaines de par le monde ont donc séparément adopté par tâtonnement la même solution » (Dehaene, 2010, p.74). La perception numérique du bébé se prolonge donc chez l'homme adulte, dans sa plus ancienne conception. Cette perception innée et biologique des petits nombres a également été analysée par Dehaene (2010, p.79) dans le cas de personne qui, à la suite d'une lésion cérébrale, sont devenues incapables de compter des quantités au-delà de 4 mais qui cependant pouvaient dénombrer 1, 2 et même parfois 3 rapidement, sans erreur et avec une grande confiance. Notre héritage numérique est donc universel et biologiquement inscrit dans nos gènes. Pour Dehaene (2010), cette intuition

numérique peut prendre le nom de « sens du nombre », sens qui est à la base de l'acquisition du nombre et que chaque être humain, y compris le bébé, partage.

Une recherche sur les capacités numérique précoces (Wynn, 1992) sur des enfants de 4 à 5 mois a permis d'aller même plus loin dans l'observation de ce sens du nombre chez les bébés. Wynn y avance qu'à cet âge déjà, les nourrissons sont capables d'effectuer des additions et des soustractions. En parallèle, une même étude a été effectuée sur des primates (Hauser, 1996) et en conclu que les singes aussi sont capables de distinguer deux quantités différentes. Ces recherches doivent encore être approfondies, elles sont parfois critiquées et débattues, mais elles ont permis de mettre en évidence que dès le plus jeune âge, l'être humain a des capacités mathématiques. « Les résultats de Wynn et de Hauser indiquent donc que le nombre vient aux animaux, dont l'Homme, bien avant l'apparition du langage, et qu'il s'inscrit biologiquement dans des systèmes visuels et spatiaux liés à l'action » (Houdé, 2019, p.279).

Si les techniques d'imagerie cérébrale ont pu détecter une activité cérébrale précoce lorsque les bébés sont en situations d'évaluation de très petites quantités, cela ne fait pas pour autant d'eux des calculateurs. Le nombre arrive bien de manière naturelle et innée à l'enfant, mais une série d'apprentissages sera nécessaire pour que l'enfant puisse se représenter la quantité et construire ainsi le concept de nombre pour l'utiliser finalement dans des situations concrètes.

3.4.2. L'acquisition du concept de nombre chez l'enfant

Il existe une multitude de théories sur l'acquisition du nombre chez l'enfant. Chercheurs et pédagogues ont inventé des nomenclatures différentes selon les points de vue, selon les époques et les conceptions. Nous avons choisi ici de prendre une théorie liée directement à l'enseignement, à la pratique en classe. Nous allons donc développer le point de vue et la terminologie développée en particulier par Charnay (2013)

Pour maîtriser le concept de nombre, l'enfant doit pouvoir lui donner les trois dimensions suivantes :

- La composante problème (donner du sens)
- La composante langage (avoir des représentations du nombre)
- La composante « invariants » (opérer sur le nombre)

C'est donc en travaillant sur ces trois dimensions que petit à petit l'enfant peut se faire une représentation du nombre.

La composante problème fait référence à la capacité d'utiliser différents aspects du nombre pour résoudre des situations problèmes. L'élève doit pouvoir utiliser le nombre comme expression d'une quantité d'objets contenus dans une collection, et comme expression d'un rang, occupé par un élément dans une liste donnée. On peut faire ici un lien avec la main du chapitre précédent proposée par Ifrah et représentant l'aspect cardinal et ordinal du nombre, car ce sont ces deux aspects que l'élève doit pouvoir utiliser dans une situation pratique. Quand un enseignant demande le nombre de jetons dont il aura besoin pour remplir une boîte de douze compartiments par exemple, il travaille cette composante. Il fait intervenir la mémoire de la quantité, la mémoire du rang ainsi que la logique (problème). La composante problème désigne donc le sens que l'élève donne au nombre et comment il l'utilise pour résoudre des problèmes en calculant, en dessinant ou en utilisant sa mémoire.

La composante langage fait référence à la manière dont on se représente le nombre, dont on peut l'exprimer de manière orale, écrite ou sous forme de quantité. On a pu localiser dans plusieurs zones du cerveau des fonctions liées à différents apprentissages mathématiques. Elaboré par Dehaene et Cohen, le modèle du triple code (1995) décrit trois modes de représentation : la représentation analogique, la représentation verbale et la représentation symbolique.

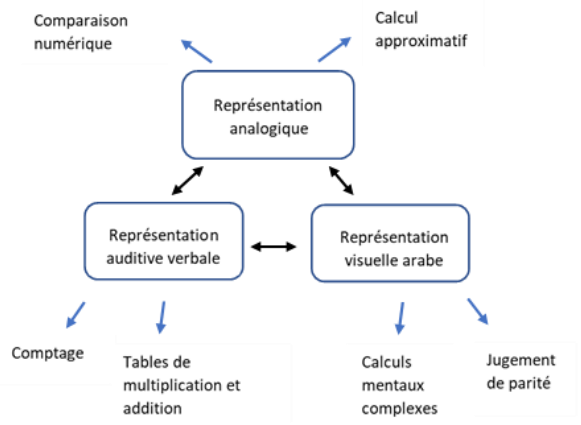
- La représentation analogique désigne une quantité d'objets. « Elle permet des calculs approximatifs et des comparaisons de quantité. […] Il peut s'agir d'encoches taillées dans deux tiges de bois parallèles, permettant, par correspondance terme à terme, d'indiquer l'égalité des deux cardinalités » (Fayol, 2018, p.16 et 21). Il peut aussi s'agir des doigts qui désignent une quantité d'autres choses (pains, fruits, animaux). La représentation analogique permet donc l'abstraction par un système comptable (cailloux, encoches, doigts, …) d'un nombre d'objet.

- La représentation verbale est en lien avec le canal auditif. « Elle renvoie aux formes auditives et verbales de dénominations de quantités, mais aussi à la l'écriture et à la lecture de formes écrites (en lettres) des noms de nombres. […] Cela reviendrait à attribuer un mot à chaque cardinalité » (Fayol, 2018, p.16 et 28). Cela renvoie donc au fait d'utiliser un mot pour désigner une collection. En français, la représentation verbale n'est pas évidente car il y a des irrégularités dans les mots qui constituent la chaîne numérique.

- La représentation symbolique est en lien avec le canal visuel. On parle aussi de la représentation indo-arabe. Selon Fayol (2018), il s'agit d'un système numérique

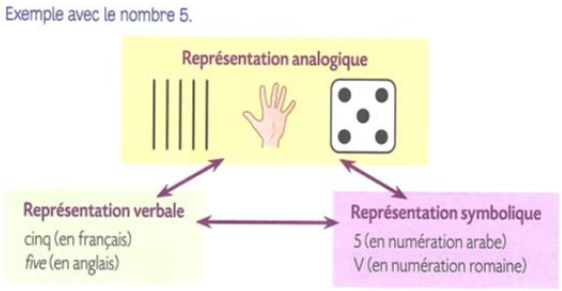
écrit qui comporte deux éléments : la connaissance des chiffres de zéro à neuf et le principe de notation positionnelle. « Elle utilise un système logographique [association directe d'un chiffre à une quantité d'unités] visuo-spatial indépendant du langage et des lettres, mobilisé pour la résolution des opérations complexes » (p.17).

Chaque représentation du nombre se trouve dans un endroit précis du cerveau, reliée aux autres par un système complexe. Le passage d'une représentation à l'autre permet à l'enfant notamment de maîtriser le concept du nombre. Ce passage (représenté ici par les flèches noires) est appelé le transcodage. On peut illustrer le modèle du triple code ainsi :



Inspiré de
Dehaene et Cohen, 1995

Et de manière plus illustrée et simplifiée, on peut le représenter ainsi :



Charnay, 2013, p.20

En classe, ce travail de transcodage va se traduire par l'apprentissage du passage d'une représentation à l'autre (verbale à analogique / verbale à symbolique, …) en utilisant du matériel, les mots-nombres ou les traces écrites.

La composante « invariants » du concept de nombre selon Charnay fait référence aux techniques et aux propriétés du nombre. L'élève doit pouvoir associer un nombre à une quantité, c'est-à-dire dénombrer.

Il existe plusieurs manières de dénombrer : par subitizing (reconnaissance perceptive, chez les bébés par exemple), par comptage (le dernier mot-nombre énoncé correspond au nombre

d'objets de la collection), par calcul (par addition ou multiplication), par groupement, par estimation, … Dans tous les cas, l'élève doit pouvoir mettre en œuvre ces diverses procédures et utiliser les nombres.

Le dénombrement par comptage, qui nous intéresse particulièrement ici, suppose la maîtrise de cinq principes définis par Gelman (1978, p.243) qu'il semble important de citer : le principe d'ordre stable (dire les mots-nombres dans un ordre fixe), le principe de correspondance terme à terme (chaque élément correspond à une seul mot-nombre), le principe de cardinalité (le dernier mot-nombre représente la quantité totale), le principe d'abstraction (on peut dénombrer des objets hétérogènes, la forme ne compte pas) et le principe de non-pertinence de l'ordre (les éléments peuvent être comptés dans n'importe quel ordre). C'est uniquement quand l'enfant peut mettre en œuvre ces cinq principes qu'il maîtrise le dénombrement par comptage.

En plus de ces cinq principes, l'enfant doit connaître la chaîne numérique (la suite des mots-nombres) décrite plus haut comme le principe d'ordre stable. En français, l'acquisition de cette chaîne est rendue difficile par les irrégularités de la langue (onze, douze et non dix-un, dix-deux…)

Fuson, Richard et Briard (1982), cités par Charnay (2013) ont décrit quatre stades dans son acquisition :

1. Le niveau chapelet, où l'enfant récite d'une traite et sans pouvoir s'arrêter la suite des mots-nombres, comme une comptine, comme un tout.
2. Le niveau de la chaîne insécable, où l'enfant récite une suite de mots individualisée mais où il ne peut commencer depuis un nombre donné. Il a besoin de revenir au début de la chaîne pour compter.
3. Le niveau de la chaîne sécable, où l'enfant peut compter depuis un nombre donné ou compter d'un nombre à un autre. Il peut également compter à rebours.
4. Le niveau de la chaîne terminale, où l'enfant est capable de compter à l'endroit et à l'envers à partir d'un nombre donné et où il est capable de conserver en mémoire de travail la trace des nombres déjà comptés.

Selon Charnay (2013), cette chaîne s'acquiert entre 2 et 6 ans, avec de fortes variations d'un enfant à l'autre.

En conclusion, l'acquisition du concept de nombre demande de multiples capacités, qui ne sont pas uniquement basées sur l'acquisition de la chaîne numérique mais également sur le dénombrement, sur la compréhension de l'aspect ordinal et cardinal du nombre pour donner du sens et sur les trois représentations du nombre, entre autres.

Ainsi, comprendre pourquoi l'être humain a eu besoin de dénombrer les quantités à l'aide d'une suite déterminée (en l'occurrence orale) pourrait amener les élèves à mieux retenir et manipuler cette suite, ainsi qu'à dénombrer différentes quantités de façon correcte. Etudier l'histoire de l'écriture des nombres et la naissance de la valeur positionnelle pourrait permettre aux élèves de mieux comprendre les liens entre le code arabe et les quantités qu'il exprime, mais aussi de mieux comprendre l'algorithme de l'addition en ligne et en colonne.

3.5. La motivation des élèves vis-à-vis des maths

On voit donc que l'acquisition du nombre est un processus complexe qui commence dès le plus jeune âge, et que c'est surtout à l'école que l'enfant va apprendre à maîtriser ce concept et à l'utiliser dans des situations de la vie réelle. Bien que les mathématiques soient valorisées dans notre société, l'attitude des élèves face aux mathématiques n'est pas toujours positive. « Environ 20% des enfants et des adolescents développent à leur endroit des sentiments négatifs, allant de l'anxiété à la phobie, sans qu'on comprenne encore très bien pourquoi » (Fayol, 2018, p. 3). Fayol n'hésite pas à parler de désaffection généralisée des jeunes générations pour les enseignements scientifiques (2004, p. 5). Les mots sont forts et percutants. Il semble donc y avoir une appréhension face aux mathématiques, qui est difficilement explicable. Le programme TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study), évaluation internationale faite sur presque 4000 élèves en France, a mesuré les performances des élèves face aux mathématiques. Il en ressort « une appétence pour les mathématiques moins partagée qu'il y a vingt ans. Le profil de ces élèves a changé : en 1995, 17,9 % déclaraient s'ennuyer en faisant des mathématiques, ce taux s'élève à 34,4 % en 2015» (Le Cam & Salles, 2016).

Une autre constatation de cette étude est que le choix de s'orienter en formation scientifique se ferait par défaut, selon une pression sociale ou pour avoir un bon niveau scolaire global, plutôt que par réelle envie de faire des mathématiques. Cette enquête a aussi été menée avec des élèves de CM1 (6H) et l'un des points forts mis à jour est qu'une partie considérable des élèves n'a pas les connaissances élémentaires en mathématiques.

> En France, 13 % des élèves en mathématiques sont dans ce cas. En Europe, ils sont en moyenne seulement 5 %. En France, 4 % des élèves en mathématiques obtiennent un score inférieur ou égal à ce qu'ils auraient obtenu s'ils avaient choisi de répondre au hasard aux questions à choix multiples. Ces pourcentages ne sont pas négligeables et dépassent les pourcentages européens moyens. (Colmant & Le Cam, 2016)

Ces résultats illustrent une baisse de compréhension et d'intérêt face aux matières mathématiques en France. Malheureusement, cette étude n'a pas été conduite en Suisse.

Il existe peu d'outils pour évaluer ces sentiments des élèves face aux mathématiques. Nous avons néanmoins trouvé une évaluation diagnostique créée par Vinais (2010) nommée « le projet du compteur », en référence au projet de lecteur largement répandu pour évaluer les représentations des élèves concernant leur intérêt à apprendre à lire. Vinais cherche, au travers de son questionnaire, à saisir, à un niveau métacognitif, les représentations des élèves du côté du nombre et du côté des mathématiques et du calcul. Ce questionnaire permet à l'enseignant d'appréhender la vision de l'élève, afin d'en comprendre sa représentation. C'est un outil donnant, entre autres, des pistes sur le sens qu'un élève peut prêter aux mathématiques.

Il semble important de ne pas rester indifférent et de s'interroger sur le fond de cette démotivation et sur ses raisons. Ecouter les élèves, leur donner la parole, pourrait faire naître des pistes pour les remotiver et leur redonner goût aux mathématiques.

3.6. Lien avec l'enseignement spécialisé

Comme nous l'avons décrit, l'acquisition du concept de nombre et le sens des mathématiques sont des objectifs travaillés à l'école. Ils le sont également dans les classes d'enseignement spécialisé. Ils y sont même décortiqués et présentés aux élèves sous plusieurs angles. Selon nos observations, pour des enfants tout-venant, l'acquisition du concept de nombre se fait de manière presque implicite. Les deux aspects du nombre (ordinal et cardinal), les représentations du nombre (triple code de Dehaene et Cohen) ne sont pas forcément présentés tels quels aux élèves.

En enseignement spécialisé, pour permettre à l'élève de concevoir le nombre, les étapes décrites dans ce travail sont généralement proposées les unes après les autres. Les enseignants doivent y envisager le nombre sous plusieurs éclairages pour le transmettre aux élèves de la manière la plus explicite possible.

Les concepts mathématiques y sont également exercés, souvent liés à leur utilité dans la vie quotidienne. En effet, les activités pratiques sont souvent utilisées dans les classes spécialisées : cuisine, commissions, autonomie dans les transports, déplacement à pied, …

Mettre en lien l'histoire des mathématiques et l'enseignement spécialisé nous a semblé un exercice intéressant car il est possible que pour des élèves qui ont besoin de temps pour conceptualiser le nombre, qui ont besoin d'y mettre du sens, un apport historique pourrait amener un regard plus large, une motivation plus profonde.

3.7. Synthèse du cadre théorique

Au vu de ce qui précède, on voit qu'il y a de bonnes raisons de penser qu'introduire les concepts mathématiques par l'histoire de leur évolution pourrait permettre aux élèves de mieux les comprendre et d'y voir plus de sens. Toutefois, nous n'avons pas trouvé de travaux qui auraient démontré empiriquement cette influence.

De manière générale, les pédagogues s'accordent sur l'intérêt, pour les enseignants, de connaître l'histoire des mathématiques, afin de mieux enseigner les différents concepts. « Les connaissances mathématiques se construisent en effet par rapport à des savoirs qui ont une histoire qu'il est préférable de ne pas ignorer lorsqu'on a comme projet de les enseigner » (Dias, 2018, p.103). Cependant, l'intérêt de l'introduction de l'évolution historique des concepts mathématiques directement auprès des élèves, telle qu'étudiée dans le présent travail, représente à notre connaissance une nouveauté. En plus de l'idée d'utiliser l'histoire des mathématiques auprès des élèves, le développement de moyens adaptés pour le faire constitue également une démarche novatrice.

Le cadre théorique du présent travail ne peut être que large, tant les études et les ouvrages manquent pour faire l'hypothèse de l'utilité de l'histoire des mathématiques, ce d'autant plus pour les élèves des cycles 1 et 2 et de l'enseignement spécialisé. On ne peut qu'espérer que le travail pratique qui va suivre permette d'ajouter une petite pierre à cet édifice encore en construction.

4. METHODOLOGIE

4.1. Formulation et vérification de l'hypothèse

Après avoir fait le lien entre l'histoire de certains concepts mathématiques et l'acquisition de plusieurs habiletés pour les élèves, nous posons l'hypothèse suivante :

> Des séquences d'enseignement sur l'histoire des mathématiques en classe spécialisée amènent du sens à cette branche et améliorent les compétences des élèves en numération et en arithmétique.

Pour vérifier notre hypothèse, nous allons mesurer l'évolution des performances mathématiques de trois élèves de l'enseignement spécialisé avant, durant et après des séquences d'enseignement sur l'histoire des mathématiques.

Nous avons donc créé quatre séquences d'enseignement sur l'histoire de notions mathématiques fondamentales qui posent régulièrement des difficultés aux élèves :

1. le dénombrement
2. le comptage par pointage corporel
3. le passage de la quantité aux symboles (groupement)
4. l'origine des chiffres arabes et du zéro en lien avec la valeur positionnelle

Ces séquences sont présentées aux élèves sur un laps de temps de deux mois. Elles sont en lien direct avec les habiletés mathématiques attendues et évaluées durant le processus.

Pour évaluer l'évolution des performances mathématiques des élèves, nous avons créé un test en numération et en arithmétique, décrit plus précisément dans les pages suivantes.

Pour évaluer le sens que les élèves accordent aux mathématiques, nous avons utilisé un questionnaire général lui aussi explicité plus loin dans ce travail.

Tout au long de cette recherche, un carnet de bord nous permet de prendre du recul et d'analyser les facilitateurs et les difficultés du processus.

4.2. Dispositif général

L'expérimentation a lieu dans une classe d'enseignement spécialisé comptant en tout cinq élèves. L'enseignante amène une séquence sur l'histoire des mathématiques toutes les deux semaines environ.

La classe entière est présente lors de l'animation autour des séquences, profitant ainsi de faire émerger les questionnements, les observations de chacun. Les séquences sont construites en deux parties. Dans la première partie, l'enseignante raconte un épisode de l'histoire des mathématiques. Dans la deuxième partie, les élèves sont plus actifs et travaillent en manipulant des objets pour mieux intégrer le thème de la séquence.

Les séquences se déroulent dans la classe des élèves, entre le lieu de regroupement (partie contée) et la grande table (partie manipulée). Les élèves sont ainsi dans un environnement connu, sans nouveauté qui pourrait être source de distraction. Elles ont lieu le matin, lors des leçons scolaires prévues à l'horaire.

4.3. Devis expérimental

4.3.1. L'étude de cas

Pour fournir une analyse en profondeur et comprendre le cheminement des élèves, nous utilisons la méthode de l'étude de cas. En effet, dans l'enseignement spécialisé, il est difficile de comparer des groupes ou des classes, tant les caractéristiques sont différentes d'un élève à l'autre. Dans l'impossibilité de créer un groupe expérimental et un groupe contrôle, il nous a semblé logique de nous pencher sur l'évolution de quelques élèves avant, durant et après l'introduction des séquences sur l'histoire des mathématiques. L'étude de cas nous permet ici de mesurer l'évolution d'un élève étant lui-même son propre témoin. Nous sommes donc conscients que les résultats de ce travail ne peuvent être généralisés et qu'ils ne sont représentatifs que de cette situation précise. Comme le précise Gagnon (2012) « la première grande force de l'étude de cas comme méthode de recherche est de fournir une analyse en profondeur des phénomènes dans leur contexte » (p. 2). Toujours selon Gagnon, l'étude de cas permet de développer des paramètres historiques et donne une forte validité interne, car les phénomènes sont représentatifs de la réalité étudiée. Par contre « elle présente des lacunes importantes quant à la généralisation des résultats. En effet, il y a peu de chances d'avoir suffisamment d'études d'autres cas exactement comparables pour rendre les conclusions applicables à toute une population » (Gagnon, 2012, p.3).

4.3.2. Le devis à lignes de base multiples et mesures répétées

Le devis à lignes de base multiples et à mesures répétées donne une idée de l'évolution de l'état des compétences d'un élève avant, durant et après une intervention. Selon Lanovaz (2013), ce type de démarche permet « d'évaluer l'efficacité de l'intervention et de démontrer que l'intervention est responsable des changements observés » (p.161). Dans ce travail, nous cherchons à observer un changement dans les performances en mathématiques. Effectuer des mesures répétées permet d'une part d'avoir un aperçu des compétences avant l'intervention et d'autre part de vérifier si l'intervention a une incidence sur les performances des élèves. Cela permet aussi de voir si les performances restent stables après les interventions. Comme chaque cas est pris en compte pour lui-même, les données récoltées sont ici analysées séparément.

Les trois élèves sont testés sur leurs compétences en numération et en arithmétique deux fois avant les séquences, afin d'avoir des informations sur leurs compétences de base. Puis, les quatre séquences sont introduites, toutes les deux semaines, en continuant parallèlement d'évaluer les élèves avec le test de numération. Pour terminer, le test est encore passé deux fois après les séquences pour observer si les résultats restent fixes. Il y a donc huit tests au total (2+4+2). « Ce protocole, basé sur le retrait ou l'inversion du traitement consiste à vérifier si le recours […] à une intervention faite sur la variable indépendante [l'histoire des mathématiques] après la mesure d'un niveau de base de la variable dépendante [performances en numération et en arithmétique] est immédiatement suivi d'un changement appréciable de la VD (variable dépendante) » (Karsenti & Savoie-Zajc, 2011, p.160). Idéalement, nous attendons une courbe horizontale sur les deux premiers tests, puis montante lors de l'introduction des quatre séquences, et finalement stable, mais plus élevée qu'au début, sur les deux derniers tests. Dans ce cas, on pourrait dire que les interventions sur l'histoire des mathématiques, sont directement suivies d'un changement dans les compétences en numération et arithmétique.

4.4. Instruments de mesure

4.4.1. Description du test en numération et arithmétique (Annexes 1 et 2)

Le test que nous utilisons pour évaluer la progression ou non des sujets choisis se base sur un test déjà existant : le Tedi-math ; Test Diagnostique des Compétences de Base en Mathématiques créé par Van Nieuwenhoven, Grégoire et Noël (2001). Nous nous sommes inspirés de ce test validé et standardisé mais avons adapté les épreuves au niveau des sujets.

Notre test comporte quatre domaines pour le niveau 3H (une élève) : le comptage, la compréhension du système numérique, le dénombrement, le transcodage (Annexe 1). Une section est ajoutée pour le niveau 5 H (deux élèves) : l'arithmétique (Annexe 2). Ces domaines sont en lien avec les séquences sur l'histoire des mathématiques menées en classe.

Les scores correspondent aux points que chaque élève obtient aux différentes sections du test (1 point pour chaque réponse correcte). Ce sont donc les points récoltés par les élèves dans chaque domaine qui nous permettent d'observer l'évolution des performances.

Afin d'éviter une mémorisation des réponses, les items sont légèrement modifiés à chaque passation (le nombre de jetons à dénombrer n'est jamais exactement le même par exemple).

Ce test est passé de manière individuelle, une fois toutes les deux semaines environ. Il dure entre dix et quinze minutes. Le tableau ci-dessous présente à titre d'exemple pour chaque domaine, un critère d'évaluation et une question qui en découle.

Tableau 1 : exemple de questions posées dans le test en numération et en arithmétique

Domaine	Critère	Exemples de question
Comptage	Comptage avec une borne supérieure et inférieure	Peux-tu compter de 189 à 210 ?
Compréhension du système numérique	Décision numérique orale	Est-ce que ces mots servent à compter ? jeudi /onze /deuzante
Dénombrement	Dénombrement de figures linéaires	Peux-tu me dire combien y a-t-il de jetons sur la table ?
Transcodage	Lien entre nombre oral et nombre analogique	Peux-tu représenter « 77 » avec le matériel ?
Arithmétique	Compréhension de la valeur positionnelle des chiffres	Peux-tu écrire 162+5 en colonne ?

4.4.2. Description du questionnaire sur le sens des mathématiques (Annexe 3)

Pour mesurer l'impact du dispositif sur les représentations que les élèves ont à l'égard des mathématiques, nous nous sommes inspirés du questionnaire de Vinais : évaluation diagnostique en mathématiques (Evaldim, 2010). Ce questionnaire permet de se faire une image des représentations des élèves, du côté du nombre plus particulièrement (à quoi servent les nombres ?) et du côté des mathématiques plus globalement (as-tu fais des mathématiques aujourd'hui ?). Evaldim fut élaboré par deux groupes de 30 enseignants spécialisés ayant participé auparavant à une formation mathématique « Histoire, culture, sens des mathématiques et pédagogie axée sur les aspects développementaux du sujet apprenant

dans le champ du numérique ». Les dernières modifications proposées par des enseignants de terrain ont eu lieu en 2010.

Le questionnaire de base étant passablement long, nous en avons conservé uniquement les parties concernant le sens du nombre et des mathématiques dans la vie quotidienne.

Dans cette recherche, le questionnaire est présenté et lu aux élèves durant une entrevue individuelle d'une dizaine de minutes. L'enseignante lit les questions et l'élève y répond en utilisant une échelle de satisfaction (pictos). Plusieurs questions sont ouvertes et l'enseignante écrit alors les réponses des élèves. Ce questionnaire est présenté avant l'introduction des séquences et en toute fin de recherche. Durant le laps de temps des séquences, c'est avec un journal de bord que l'enseignante garde une trace des réflexions des élèves.

4.4.3. Journal de bord

> Il s'agit d'un document dans lequel le chercheur note les impressions et les sentiments qui l'assaillent pendant la recherche […] Le journal de bord remplit ainsi trois fonctions : garder le chercheur en état de réflexion active pendant sa recherche, lui fournir un espace pour exprimer ses interrogations, ses prises de conscience, et consigner les informations qu'il juge pertinentes. (Karsenti & Savoie-Zajc, 2011, p.144,145).

Cette citation résume bien notre situation, le journal de bord y joue un rôle de fil rouge, permettant de garder en mémoire les réactions des élèves mais aussi les interrogations et les observations de l'enseignante. C'est un instrument de mesure intuitif, qui a une forme spontanée. Il n'est pas analysé de façon méthodique comme ce serait le cas avec une grille particulière, il sert plutôt à accompagner la recherche sur la longueur. En utilisant le journal de bord, l'enseignante peut porter un regard plus distant sur ce qu'elle vit en classe. En effet, le double rôle qu'elle joue ici est parfois difficile à gérer : elle crée et amène les séquences didactiques aux élèves de la classe et en même temps, elle contrôle par le test de numération l'évolution des performances des trois participants à la recherche. Le journal de bord est donc utilisé comme un moyen de déposer les questions, les réflexions, les doutes de l'enseignante sur l'évolution ou les réflexions de ses élèves.

4.5. Description des participants

Les trois élèves qui participent à la recherche ont été choisis car ils rencontrent des difficultés assez classiques dans les apprentissages mathématiques. Ils ont des problèmes d'organisation lors du dénombrement par comptage. Le passage des dizaines ou des centaines ne se fait pas automatiquement (comptage oral). La compréhension du système numérique (comparaison de nombres arabes) est imprécise. Enfin, au niveau du transcodage (passage d'une représentation du nombre à une autre), ces trois élèves montrent des difficultés. Au niveau du sens, tous trois fonctionnent de manière relativement similaire, exécutant des exercices de mathématiques sans forcément en comprendre le sens, en particulier dans la résolution de problème.

Par contre, leur niveau scolaire est bien différent. C'est pourquoi les tests sont adaptés pour chacun.

L'élève A. est âgé de 12 ans. Il a un niveau scolaire de début de 5H. Il compte de manière mécanique jusqu'à 2000. Le comptage à rebours et le comptage de saut en saut n'est pas acquis. Il n'est pas organisé lors du dénombrement par comptage d'une quantité. En arithmétique, il n'a pas compris le sens de la retenue dans les additions en colonnes. En ligne, ses additions sont incorrectes (45+37=712). Il n'a pas intégré la valeur positionnelle des chiffres. Au niveau de sa motivation, il dit aimer les mathématiques. Il a appris que ce serait utile pour sa vie et répète cette phrase sans pouvoir véritablement l'expliquer. C'est un élève qui doute très vite de lui et qui perd ses moyens quand la tâche lui semble trop compliquée. Il se trouve rapidement en surcharge cognitive. Il a besoin de soutien lors d'apprentissages nouveaux et pose beaucoup de questions probablement pour se rassurer.

L'élève Y. est âgée de 12 ans. Elle a un niveau scolaire de début de 5H. Elle compte jusqu'à 2000. Elle est capable de compter à rebours sur une courte séquence, ainsi que de compter de saut en saut (uniquement de 5 en 5). Elle n'a pas de stratégie de dénombrement et ne s'organise pas par groupement. L'organisation, de manière générale dans ses apprentissages, est une compétence qui est régulièrement travaillée. En arithmétique, elle a compris le système des additions en colonne avec retenue. Il lui est encore difficile de placer correctement en colonne une addition présentée en ligne. Pour elle aussi, la valeur positionnelle des chiffres n'est pas acquise. En ce qui concerne sa motivation, elle n'aime pas vraiment les mathématiques. Elle se montre relativement passive dans cette branche. C'est une élève qui aime faire juste, qui a le souci du regard des autres et particulièrement des adultes. Elle apprend souvent par cœur au coût de grands efforts, sans vraiment comprendre le mécanisme effectué et sans pouvoir généraliser ses apprentissages.

L'élève O. est âgée de 12 ans. Elle a un niveau scolaire de 3H. Elle compte jusqu'à 39 lors du pré-test. Elle a des lacunes dans le dénombrement par comptage car elle se précipite et la mise en correspondance des mots-nombres et des objets dénombrés n'est pas précise. La précipitation est en effet une caractéristique de cette élève qui veut avant tout finir au plus vite les activités qu'elle entreprend. En classe, elle apprend presque uniquement au travers de jeux, lors du dénombrement par comptage de cartes par exemple. Elle n'organise pas son (regroupement par 2 par exemple) et est contrainte de tout recompter quand elle n'est pas sûre de son résultat. Dans ces conditions, le sens qu'elle donne aux activités de mathématiques est faible. Au niveau de sa motivation, elle dit ne pas aimer cette branche qu'elle associe uniquement aux exercices fastidieux de numération et d'addition.

De manière générale, les habiletés qui pourraient être améliorées, chez les trois participants, grâce aux séquences sur l'histoire des mathématiques, sont les suivantes :

- Utilisation précise du dénombrement par comptage
- Organisation du comptage (groupement par 2, 5 ou 10)
- Élévation de la chaîne numérique
- Lecture et écriture de grands nombres (transcodage)
- Compréhension de la place des chiffres (unité/dizaine/centaine) lors d'additions en ligne ou en colonne

4.6. Description des quatre séquences

4.6.1. Le dénombrement (Annexe 4)

La partie contée fait état de l'homme dans la préhistoire. Elle décrit le besoin des bergers de compter leurs moutons. L'enseignante sort d'un panier un bois taillé d'encoches. Elle explique qu'il fut un temps où l'homme n'utilisait pas les chiffres pour compter. Il a néanmoins eu besoin de vérifier ses biens, comme les moutons de son troupeau par exemple. Puis, l'homme a eu l'idée de faire des encoches dans du bois. Une encoche pour un mouton.

Pour la partie manipulée, l'enseignante prépare un mini jeu de rôle. Elle place sur la table des moutons en figurine et plus loin une figurine de loup. Chaque élève peut prendre le bois entaillé, et constituer à son tour une quantité équivalente de moutons, sans utiliser de chiffre. Puis, en fermant les yeux, symbole de la nuit, le loup emporte ou pas des moutons. L'élève en rouvrant les yeux vérifie s'il a autant d'encoches que de moutons. Le défi ici est de demander aux élèves de ne pas compter, d'imaginer que les chiffres n'existent pas et que la seule manière de vérifier le nombre de moutons est de placer un doigt sur une encoche à chaque fois qu'ils visualisent ou déplacent un mouton.

4.6.2. Le comptage par pointage corporel (Annexe 5)

L'enseignante reprend l'idée des encoches et la met en lien avec d'autres manières de compter sur la planète. Elle explique que dans des peuplades lointaines, on utilisait et on utilise encore le corps pour compter. Elle fait ressortir les idées des élèves sur ce sujet. Avec quoi compteraient-ils eux ? Les doigts, le visage, les orteils ? Puis au moyen du dessin agrandi de l'homme de Papouasie (Ifrah, 1985, p.36), les élèves comptent à leur tour en suivant cette technique corporelle. Cela est présenté comme une comptine, de manière récréative, les élèves pointent les doigts, les parties du visage ainsi que le buste et les jambes, pour arriver à 41. Ensuite, l'enseignante demande à un élève de lui donner une quantité de billes en désignant une partie du corps (par exemple : poignet = 6). La somme est ensuite vérifiée par l'ensemble des élèves.

4.6.3. Le passage de la quantité aux symboles (Annexe 6)

L'enseignante fait état du besoin de s'organiser pour compter des grandes collections. Elle décrit les difficultés des bergers à se déplacer avec de grandes quantités de cailloux ou des os très grands. Elle ouvre une discussion sur les désavantages de devoir emporter avec soi des collections d'objets pour vérifier la quantité de biens. Elle présente ensuite le système sumérien, en base 60, qui a permis de représenter de grandes quantités avec peu de signes. Elle prolonge l'activité en expliquant qu'au début, les symboles étaient créés en argile, puis enveloppés dans des bulles, et que petit à petit, on a tracé sur les bulles les symboles contenus. Dans la partie pratique, les élèves reçoivent des étiquettes en chiffres arabes et doivent représenter, avec de la pâte à modeler, le nombre donné avec les symboles sumériens (11 = un cône et une bille). Puis ces symboles sont enveloppés dans une bulle de pâte à modeler et les élèves inscrivent dessus la quantité avec un outil marqueur. Un travail du même type sur papier est ensuite effectué.

4.6.4. L'origine des chiffres arabes et du zéro et la valeur positionnelle (Annexe 7)

La partie contée introduit le fait que les chiffres n'ont pas toujours existé et qu'ils ont évolué dans le temps. L'enseignante présente brièvement différents systèmes de comptage (égyptien, sumérien, déjà introduits, mais aussi romain et chinois). Elle fait ressortir les représentations des élèves et leurs connaissances préalables. Elle présente finalement le système indien et son évolution pour créer finalement les chiffres actuels en utilisant le tableau de l'évolution des chiffres indiens, arabes et européens (Ifrah, 1985, p.288). Elle explique que la force de notre système est qu'avec ces 10 signes, on peut représenter les quantités jusqu'à l'infini. Elle ajoute qu'en plus, avec ce système, les calculs sont plus faciles à effectuer. Pour

la partie manipulée, chaque élève a un boulier à quatre tiges. L'enseignante en explique le fonctionnement puis dicte des nombres que les élèves représentent. Ensuite, par deux (en fonction du niveau scolaire) les élèves tirent une étiquette nombre et la représentent. Une observation sur le fait que les chiffres ne valent pas la même chose selon leur position est effectuée. Pour les élèves les plus avancés, des additions sans retenues sont exercées.

Ces quatre séquences sont créées par l'enseignante de la classe. Elle les présente à tous les élèves durant les leçons généralement dédiées aux mathématiques.

5. ANALYSE

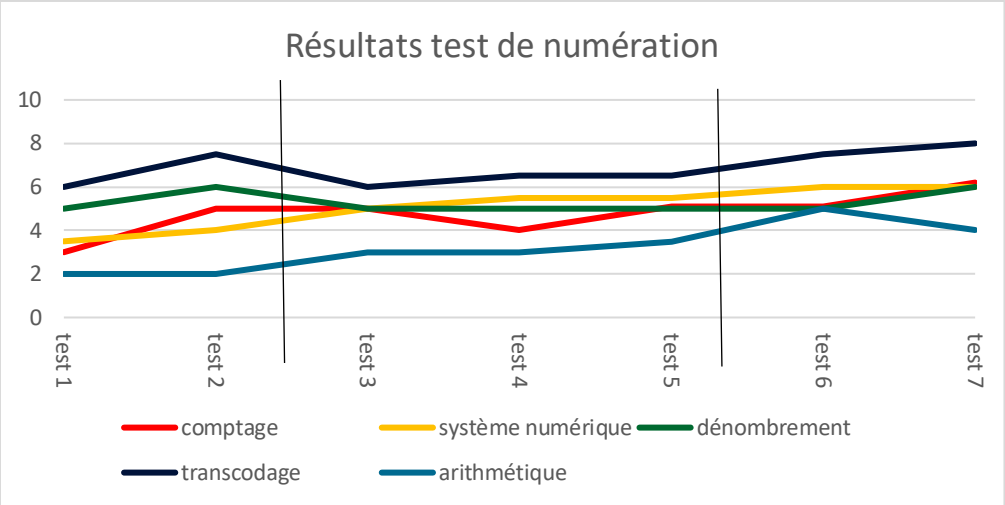
5.1. Résultats du test en numération et arithmétique

Avant d'analyser les résultats de chaque participant, il est important de noter, pour bien comprendre la signification des graphiques, que le nombre de point maximum pour chaque domaine (comptage, dénombrement, …) n'est pas le même. Le domaine du transcodage totalise un maximum de 8 points alors que les autres domaines sont à 6 points au maximum. Il ne s'agit donc pas de comparer les courbes les unes par rapport aux autres mais de les prendre chacune pour elle-même afin d'en observer l'évolution entre les différents temps de mesure.

Les deux barres verticales entre les tests 2 et 3 et les tests 5 et 6 représentent le début et la fin de la période des séquences sur l'histoires des mathématiques. Il y a donc eu deux tests avant les séquences et deux tests après.

Il n'y a malheureusement que 3 tests durant les séquences et non 4 comme prévu initialement, ceci pour des raisons d'organisation qui seront explicitées plus loin.

5.1.1. Elève A.



Graphique 1 : évolution des performances de l'élève A.

.A. a amélioré ses performances dans certaines sections du test. Il a stabilisé et parfois amélioré ses compétences après les interventions mis à part en arithmétique, où il a eu moins de points sur le dernier test.

Comptage : de manière globale, le comptage est en amélioration au fur et à mesure des tests. Au début, c'est le comptage de saut en saut qui lui fait perdre des points. Il veut aller vite et compte : 5,10,20,30, … ou 5,10,20,25,30, … Cette erreur perdure jusqu'au test 5. Puis, il n'omet plus le 15 et semble plus à l'aise. Il compte également de 2 en 2 de manière fluide. On peut penser que la séquence sur le groupement (principe de la base) pourrait l'avoir aidé à être plus précis dans son comptage.

Compréhension du système numérique : il est en amélioration constante, avec une hausse régulière et une stabilisation sur les deux derniers tests. Lors des premiers tests, la comparaison de nombres arabes est instable (455 est plus grand que 545). Puis au fil des tests, plus aucune erreur n'apparaît. Il est aussi intéressant de noter que lors des premiers tests, en décision numérique orale, il est vite désemparé. Voilà un exemple de dialogue typique des premiers tests (E = enseignante) :

E : -Est-ce que dix-huit est un mot qui sert à compter ?
A : - oui
E : - Et dix-six ?
A : - Heu… oui !

Après la séquence sur les chiffres indo-arabes (prolongée par la recherche des mots nécessaires pour compter et la constatation des irrégularités en français : on ne dit pas dix-deux mais douze), A. peut dissocier les vrais mots-nombre des pièges.

Dénombrement par comptage : on constate une baisse de résultat entre le test 2 et le test 3. Cette différence de résultat se fait au niveau de son organisation d'un test à l'autre. Lors du 2ème test, son organisation est claire (par 5) et il peut vérifier rapidement le dénombrement effectué. Par la suite il améliore durablement son organisation mais manque de précision dans le comptage (lors du dénombrement de 36 jetons, il fait des tas de 5 et omet de prendre en compte le jeton qui reste seul). Sur le dernier test, les résultats sont bons et l'exercice est effectué avec facilité et rapidité.

Transcodage : tout comme pour le dénombrement, on observe une baisse entre le test 2 et le test 3. Les résultats augmentent ensuite de manière régulière. Les erreurs du début (dit « cent-un » pour 1101, ou écrit « 2500 » pour deux mille cinquante) se font de moins en moins fréquentes. Le travail avec le matériel multibase ou l'argent pour faire le lien entre un nombre oral/écrit et le nombre analogique semble avoir été efficace. Le fait de représenter le nombre analogique lui permet de s'améliorer dans la lecture et l'écriture de grands nombres. Il est capable de remarquer ses erreurs et de s'autocorriger.

Arithmétique : les résultats des deux premiers tests sont stables, ensuite, ils s'améliorent durant les séquences. La baisse sur le dernier test est due à une erreur de placement, d'une addition en ligne, en colonne (167 + 6 = 227… l'unité 6 est posée dans la colonne des

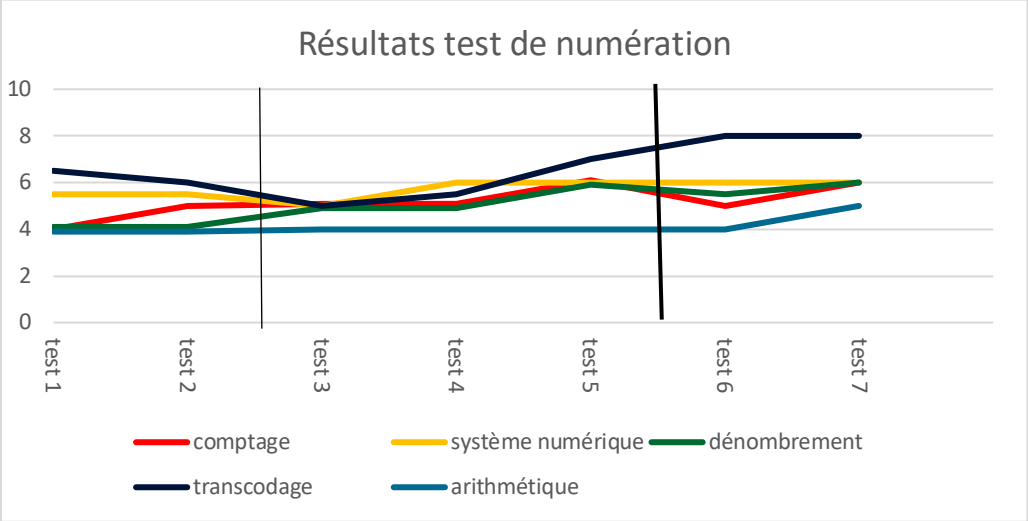
dizaines). L'addition en ligne avec retenue reste difficile sur tout le temps des tests. Il y a peu d'amélioration. Par contre, l'addition sans retenue (167 + 12) est bien comprise et stable.

En résumé, nous observons une amélioration globale dans tous les domaines. Les performances ne s'améliorent pourtant jamais clairement au cours de la période des séquences sur l'histoire des mathématiques en classe. Vu la courbe ascendante, on peut néanmoins penser que ces séquences ont permis de stabiliser les compétences de A., en particulier dans son organisation lors du dénombrement et du comptage, ainsi que pour la compréhension du système numérique (comparaison de grands nombres).

En ce qui concerne les résultats en transcodage, il semble que, plus que les séquences sur l'histoire des mathématiques, c'est la manipulation du matériel pour la représentation analogique qui a aidé A. à écrire et dire de grands nombres. En effet, bien que les quantités données et le matériel aient été différents pour éviter l'habituation, le fait de passer par la représentation analogique de manière systématique semble avoir permis de clarifier la dictée et l'écriture des nombres. A. s'est appuyé sur cette représentation pour s'auto-corriger. Pour l'arithmétique, l'exercice pratique avec le boulier a permis de donner du sens, mais n'a pas été suffisamment entrainé pour modifier les pratiques erronées.

La progression entre le test 1 et le test 2 (passés à deux semaines d'écart) pour tous les domaines sauf l'arithmétique nous indique que la progression se fait également par l'habituation. En effet, aucun nouvel outil n'a été amené entre les deux tests. Le fait de pouvoir anticiper, de savoir comment est construit le test, d'en connaître le contenu, pourrait être une raison qui explique cette progression d'une semaine à l'autre, en particulier pour un élève comme A. qui doute facilement de ses compétences et qui a besoin de sécurité dans les apprentissages.

5.1.2. Elève Y.



Graphique 2 : évolution des performances de l'élève Y.

Y. a amélioré ses performances globales dans toutes les sections du test. La progression s'est faite parfois avant, durant, ou après les séquences.

Comptage : Y s'est améliorée au fur et à mesure des tests. C'est surtout le comptage de saut en saut qui a évolué, passant d'un comptage peu précis (32,34,35,37, …) à un comptage plus régulier. Le test 6 marque une baisse de point car le passage de 1999 à 2000 (« 1999, 1100 ») ne s'est pas fait ce jour-là. La raison de ce blocage est difficile à avancer, mais le fait que ce soit le premier item du test, qui a en plus eu lieu après une semaine de vacances, pourrait être une explication (difficulté de se remettre en marche, de réactiver les processus nécessaires). Lors du dernier test, ce passage est fluide et assuré.

Compréhension du système numérique : on remarque des premiers tests très stables, puis une augmentation au test 4 après l'introduction des séquences, et à nouveau une stabilisation. Les difficultés se trouvent dans la reconnaissance de chiffres écrits (confusion & / 8) et dans la décision numérique orale (si dix-six n'est pas un mot-nombre, dix-huit non plus). Une fois la séquence sur l'histoire des chiffres indo-arabes et de la recherche des mots utilisés pour compter, ces erreurs ne sont plus apparues.

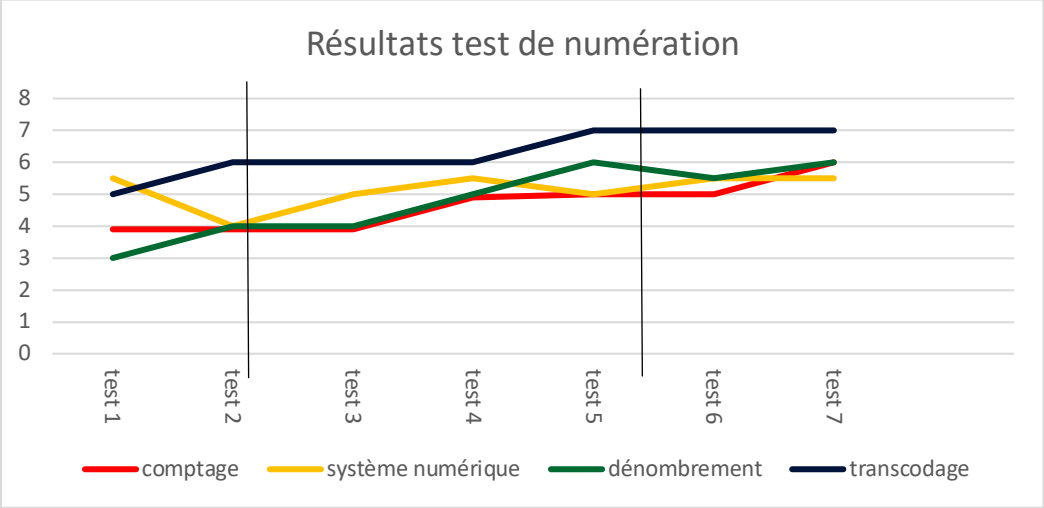
Dénombrement par comptage : le dénombrement est en progression douce tout au long des tests. Dans les deux premiers tests, il n'y a pas d'organisation lors du dénombrement de jetons. Puis une forme d'organisation nait, mais peu efficace : Y. forme des tas de 5 et des tas de 10 jetons qu'elle a ensuite de la difficulté à additionner. On peut faire un lien avec la séquence sur les groupements, mais mal utilisée dans une situation fonctionnelle. Dans les trois derniers tests, le groupement se fait par 10, il est efficace et précis. Y. a pu voir les bénéfices d'un dénombrement organisé et l'a automatisé, elle l'utilise alors de manière spontanée.

Transcodage : peu stable au début, avec même une chute de points lors des tests 2 et 3, le transcodage s'améliore ensuite de manière stable. L'écriture de nombres sous dictée a évolué positivement. Le peu de clarté sur la place du 0 lors de l'écriture de nombres (elle écrit 1100 ou 110, pour mille-dix) a finalement pu être corrigé en passant pat la représentation analogique (mille-dix c'est un cube de 1000 et une barre de 10). La séquence sur les chiffres indo-arabes et l'utilisation du boulier, où la valeur 0 est représentée de manière très claire, peut aussi avoir eu un impact sur les résultats de Y. en transcodage.

Arithmétique : la valeur des points reste la même sur les 6 premiers tests. Le passage de l'addition en ligne à l'addition en colonne est compris depuis le début. Ce qui pose problème, ce sont les additions à effectuer « de tête » en ligne (155 + 14 = 259). La valeur positionnelle des chiffres n'est pas prise en compte. La dizaine est ajoutée à la centaine. Cette erreur est persistante tout au long des tests (155 + 23 =158). Le principe du groupement des unités en dizaine est également une erreur fréquente dans les additions en ligne (47+14= 51). Il n'y a que lors du dernier test que ce principe est pris en compte (45+17=62). Ce résultat, observé en toute fin de recherche, est peut-être un effet à moyen terme de la séquence sur le groupement par 10.

En résumé, le comptage, le dénombrement et le transcodage sont des compétences qui se sont bien améliorées entre les premiers et les derniers tests. On peut penser que l'apport des séquences sur le groupement (principe de la base) ont aidé Y. à compter de saut en saut de manière plus précise et à mieux s'organiser dans le dénombrement. En arithmétique également, cette séquence pourrait avoir aidé Y. à résoudre une addition en ligne avec retenue. La séquence sur l'origine des chiffres indo-arabes et l'utilisation du boulier lui a peut-être permis de visualiser l'absence d'une quantité, qui pourrait expliquer l'amélioration dans la lecture et l'écriture de grands nombres lors du transcodage. Comme pour A., nous faisons le constat que l'utilisation répétée de matériel pour la représentation analogique (que ce soit des jetons de couleur, le matériel multibase ou l'argent) a amené de la clarté.

5.1.3. Eleve O.



Graphique 3 : évolution des performances de l'élève O.

Comme O. a un niveau scolaire de 3H, le test en arithmétique ne lui est pas présenté. L'accent est mis sur les 4 premières compétences. O. améliore son score sur trois des domaines proposés. Seul le domaine de la compréhension du système numérique n'augmente pas entre le premier et le dernier test.

Comptage : on peut noter ici le passage de 39 à 40 lors du test 4 alors qu'auparavant, O. passait automatiquement de 39 à 50. Cela peut être mis en lien avec la séquence sur le comptage ordinal, en utilisant les parties du corps. On peut penser que travailler sur la chaîne numérique en y associant des gestes allant plus loin que 10 ait eu un effet positif dans cette situation. Le comptage à rebours (de 10 à 5 ou de 12 à 7) s'est aussi amélioré au fur et à mesure des tests, peut-être par répétition, car c'est un exercice nouveau pour O. qui a toujours appris à faire « un de plus ».

Compréhension du système numérique : c'est le seul domaine de toute cette recherche qui ne s'améliore pas (sur tous les domaines des trois participants). La reconnaissance de chiffres à l'oral et à l'écrit est excellente dès le départ et sur la durée des tests, ce qui explique le score élevé du test 1. Nous constatons que c'est la comparaison de nombres arabes qui pénalise O. durant les tests. Est-ce que la précipitation de O. joue un rôle dans ce résultat ? En effet, plusieurs erreurs sont restées similaires sur la durée des tests (31<13). Il est certain que les séquences (le boulier par exemple) n'ont pas suffi à donner des stratégies suffisantes pour effacer les erreurs de compréhension du système numérique.

Dénombrement par comptage : les progrès au fur et à mesure des tests sont notables. Là où la précipitation et l'imprécision étaient courantes (premier test), très vite des réflexes d'organisation et de dénombrement précis prennent place. L'organisation se fait naturellement

par groupes de 2. Le dénombrement par comptage se fait de 1 en 1, mais de manière plus lente et plus précise. La séquence sur le dénombrement (autant d'encoches que de moutons) pourrait avoir un lien avec cette amélioration, et cela apparaît de manière relativement marquée sur le graphique des résultats (hausse de la courbe après le test 3).

Transcodage : on observe une courbe en hausse déjà entre le test 1 et le test 2. Cela pourrait s'expliquer par la répétition d'une même procédure, importante pour cette élève qui n'aime pas la nouveauté. On observe qu'au fur et à mesure, les compétences de O. s'améliorent, en particulier dans ce qui touche à la représentation analogique, d'abord peu efficiente. L'utilisation à plusieurs reprises du matériel multibase pourrait être un facteur de cette amélioration. La lecture et l'écriture de nombres (représentation orale et verbale) est dès le début très bonne. Il y a peu d'évolution sur ces deux représentations.

5.2. Synthèse des résultats en numération et arithmétique

De manière globale, il est difficile de faire un lien direct entre les séquences sur l'histoire des mathématiques amenées en classe et les résultats au test de numération. En effet, malgré la progression de presque tous les domaines mesurés dans cette recherche (13 sur 14), peu de domaines augmentent exactement durant les séquences sur l'histoire des mathématiques et se stabilisent ensuite, comme attendu. En effet, il faut prendre en compte le fait que certains apprentissages ont des effets positifs à long terme et pas directement après l'introduction d'une notion.

On peut tout de même mettre en lumière quatre courbes, stables au début, puis en augmentation au cours des séquences et plus stables sur les tests 5 et 6. Ces quatre courbes sont exactement celles attendues dans un devis à lignes de base multiples et à mesures répétées tel qu'utilisé dans cette recherche. Il s'agit de la compréhension du système numérique et l'arithmétique pour A., du dénombrement pour Y. et du comptage pour O.

En observant ces quatre courbes, on peut émettre l'hypothèse que les séquences prenant en compte le besoin de l'homme de compter ainsi que les manières qu'il a trouvé pour dénombrer une quantité d'objets a eu un impact direct pour l'élève de niveau 3H (O). Par contre, pour les deux élèves de niveau 5H (A et Y), ce sont les séquences sur l'utilisation de symboles, le besoin de regroupement et l'explication sur l'origine des chiffres arabes qui ont peut-être joué un rôle.

Un autre élément qui ressort est le bénéfice de l'utilisation de matériel pour travailler sur la représentation du nombre. En effet, l'utilisation de matériel pour effectuer la représentation analogique est une aide pour les trois élèves qui s'améliorent dans la représentation du

nombre au niveau verbal et au niveau visuel. La clarté de ce matériel est indéniable, en particulier le matériel multibase (je vois deux plaques, trois barres et six unités : je dis « deux cents trente-six »).

5.3. Résultats du questionnaire sur le sens des mathématiques

Nous présentons sous forme de tableau les résultats du questionnaire avant les séquences (mesure 1) et après (mesure 2). Les réponses attendues des trois élèves ont été transformées en chiffres : 1 = jamais / 2 = parfois / 3 = souvent / 4 = toujours. Dans le questionnaire de base, ces valeurs sont affichées sous forme de pictogrammes (voir annexe 3).

La première question du questionnaire « Peux-tu me donner 4 nombres (à l'oral ou à l'écrit) » ne figure pas dans l'analyse car cette phrase sert d'amorce pour s'assurer que le mot « nombre » est bien compris par l'élève.

Tableau 2 : questionnaires A.

Questionnaire de A. Mesure 1 : octobre 2018 Mesure 2 : mars 2019	Mesure 1	Mesure 2
1. As-tu déjà vu des nombres dans la rue ?	4	4
2. As-tu déjà vu des nombres dans les jeux ?	4	3
3. As-tu besoin de compter dans la vie ?	4	3
4. Aimes-tu les maths ?	4	4
5. Est-ce que tu fais des maths quand tu n'es pas à l'école ?	4	4
6. As-tu fait des maths aujourd'hui ?	1	4
7. Est-ce que les maths sont utiles dans la vie ?	4	3

Dans cette situation, on voit que lors de la mesure 2, les résultats sont identiques ou moins élevés, à part pour la question 6 (en effet, lors du deuxième questionnaire, A. a déjà travaillé un moment sur fiche à sa place, ce qui lui fait dire qu'il a déjà fait des mathématiques le jour-même). Le fait de venir à l'école, de gérer son temps pour prendre le bus, d'arriver à l'heure n'est pas nommé comme pouvant potentiellement être une activité mathématique. Dans le

premier questionnaire, on peut soulever que pour A., les nombres servent à « tout ». Il le répète plusieurs fois. Il lie également les mathématiques au fait de pouvoir gérer son argent, faire des achats ainsi que trouver un travail. Dans le deuxième questionnaire, les réponses sont plus réfléchies et argumentées. Il peut donner des exemples concrets aux questions 1 et 2 : sur les plaques des voitures, les numéros du bus et du train, les limitations de vitesse, les numéros de rues et de maison ou pour les jeux, le ligretto, pour compter les points. Il peut aussi mettre plus de nuance dans ses réponses : dans beaucoup de jeux mais pas dans tous les jeux ou à la question 7 : c'est utile mais pas toujours, des fois on n'en a pas besoin. Certes, le nombre de point est moins élevé lors de la mesure 2 mais on observe ici une attitude plus consciente, plus reliée avec la réalité et basée sur des expériences quotidiennes concrètes.

Tableau 3 : questionnaires Y.

Questionnaire de Y. Mesure 1 : octobre 2018 Mesure 2 : mars 2019	Mesure 1	Mesure 2
1. As-tu déjà vu des nombres dans la rue ?	2	2
2. As-tu déjà vu des nombres dans les jeux ?	3	3
3. As-tu besoin de compter dans la vie ?	4	4
4. Aimes-tu les maths ?	4	4
5. Est-ce que tu fais des maths quand tu n'es pas à l'école ?	4	4
6. As-tu fait des maths aujourd'hui ?	4	4
7. Est-ce que les maths sont utiles dans la vie ?	4	4

Dans ces questionnaires, les données sont totalement identiques, d'une passation à l'autre. L'évolution se fait plutôt dans les réponses orales que Y. donne. La deuxième passation donne lieu à plus d'exemples concrets. Où Y. répondait par une appréciation sans donner plus de précision, elle est ensuite capable d'argumenter. Elle a plaisir à faire des liens avec les séquences :« sur les horloges, c'est des chiffres romains, comme à la gare ! » et de nommer des endroits précis où elle a vu des nombres dans la rue (numéros de maison et de rue), ainsi que dans des jeux (monopoly, jeux de dés). L'utilité de savoir compter est en premier lieu liée à l'argent et au fait de pouvoir gérer un budget. Dans le deuxième questionnaire, elle ajoute

une dimension liée au temps et à la distance (savoir le nombre de jours avant les vacances, savoir lire l'heure, savoir si c'est loin ou pas). Le fait de faire des mathématiques se résume lors des deux mesures à faire des fiches. Y. répond très positivement à la question 5 mais pour elle, faire des mathématiques quand elle n'est pas à l'école c'est quand sa mère lui fait faire des calculs. Elle évalue que les mathématiques sont utiles dans sa vie dans un premier temps (mesure 1) pour calculer, acheter, cuisiner et dans un deuxième temps (mesure 2) pour acheter une maison, vérifier son salaire, payer des factures, mesurer le temps. On peut donc constater que bien que les mesures soient identiques, un cheminement a été effectué par Y. et que sa vision est finalement un peu plus large et prend en compte la notion de temps.

Tableau 4 : questionnaires O.

Questionnaire de O. Mesure 1 : octobre 2018 Mesure 2 : mars 2019	Mesure 1	Mesure 2
1. As-tu déjà vu des nombres dans la rue ?	1	1
2. As-tu déjà vu des nombres dans les jeux ?	4	4
3. As-tu besoin de compter dans la vie ?	1	1
4. Aimes-tu les maths ?	2	4
5. Est-ce que tu fais des maths quand tu n'es pas à l'école ?	1	1
6. As-tu fait des maths aujourd'hui ?	4	1
7. Est-ce que les maths sont utiles dans la vie ?	1	1

Il y a peu de progression dans les représentations de O., entre les deux questionnaires. Les mêmes arguments reviennent d'une fois à l'autre : les nombres servent à compter, compter les cartes Pokemon et Yugioh. Les jeux dans lesquels O. a vu des nombres restent également les mêmes : le Uno, le jeu du 11. Le fait de voir des nombres dans la rue n'évolue pas, O. trouve même cette question amusante, comme si c'était une blague… elle répond « jamais» à chaque questionnaire. L'utilité de compter dans la vie ne change pas d'un questionnaire à l'autre, ce n'est pas utile à ses yeux. Les maths restent liés à l'action de faire des calculs et des fiches en classe (jouer ce n'est pas des maths, sur l'Ipad, ce n'est pas des maths). D'où

la réponse très différente à la question 6 car la première fois, elle venait de terminer un exercice de numération, et la deuxième fois, elle n'avait pas encore effectué de travail individuel en mathématiques en classe. La différence que l'on peut soulever est celle de la question 4 qui est bien plus positive lors de la mesure 2. Sans qu'elle puisse mettre de mots sur cette appréciation, son attitude face aux mathématiques a changé. L'enseignante en fait également l'observation dans le journal de bord « O. râle beaucoup moins quand je lui donne des exercices de mathématiques. Elle fait toujours un soupir avant de commencer mais se met volontiers au travail. Je ne la sens plus dans le refus, même si les tâches demandées ne sont pas si faciles » (journal de bord, février 2019).

5.4 Synthèse des résultats du questionnaire sur le sens des mathématiques

Les résultats des questionnaires sont globalement différents pour les deux élèves de niveau 5H que pour l'élève de niveau 3H.

Par rapport à l'attitude des élèves, on note une modification surtout dans le rendu oral des deux élèves de niveau 5H. En effet, tous deux sont plus conscients des situations de la vie courante dans lesquelles les nombres sont présents. Ils peuvent mieux étayer leurs exemples et font référence à des moments précis et concrets de leur quotidien, incluant aussi la notion de temps. L'élève qui est dans les premiers apprentissages de mathématique (3H) reste par contre peu consciente que les nombres existent autour d'elle, dans des situations de la vie courante. Les nombres sont toujours reliés à l'école et aux jeux mais elle ne les voit pas dans son quotidien. On peut penser que parler des chiffres et en particulier des différents systèmes de numération a permis aux élèves de niveau 5H de se rendre compte que les nombres ont une histoire et se trouvent, d'une manière ou d'une autre, tout autour d'eux. Cela semble encore trop abstrait pour l'élève de 3H.

Par contre, il est intéressant de noter que malgré le fait qu'elle n'y mette pas beaucoup de sens, l'attitude globale de O. s'est nettement améliorée et est plus positive en fin de recherche qu'en début.

Pour les trois participants, le fait même de faire des mathématiques reste fortement lié à l'action de faire des calculs et des fiches. A la question « Est-ce que tu fais des maths quand tu n'es pas à l'école ? », c'est la référence aux devoirs à la maison ou aux calculs faits par les parents qui ressort fortement. Les séquences n'ont ainsi pas permis d'élargir ce que les enfants entendent par « faire des mathématiques ». Le modèle scolaire « traditionnel » lié aux exercices sur fiches semble bien ancré pour ces élèves. Il faudrait aller plus loin dans ce travail pour éventuellement modifier leurs représentations.

5.5. Journal de bord

Dans le journal de bord, trois types d'éléments sont répertoriés. Les doutes de l'enseignante dans son travail de transmission d'un savoir nouveau, les éléments positifs relevés par l'enseignante et les progrès de tous les élèves de la classe particulièrement dans le domaine du nombre.

L'enseignante fait état de ses nombreuses incertitudes sur l'adéquation des séquences pour les élèves. Comme les parties pratiques des séquences sont parfois différenciées selon le niveau des élèves, certaines séquences semblent plus évidentes pour les élèves niveau 5H que pour les élèves niveau 3H ou vice-versa. Par exemple, lors de la séquence sur le passage d'une quantité à un symbole, l'enseignante remarque que pour les élèves de 3H, c'est encore trop abstrait. Utiliser un seul symbole pour représenter une quantité (**O**=10) est une notion difficile à concevoir. « Ce passage à l'abstraction est compliqué pour elle » (janvier 2019). Par contre, pour les élèves de 5H, c'est d'une clarté incroyable et cela consolide des bases déjà établies. L'enseignante se pose donc beaucoup de questions sur sa manière d'amener les séquences, le plus clairement possible, pour tous les élèves. Elle regrette plusieurs fois de ne pas avoir de support de référence à suivre pour son activité. Elle doit inventer les séquences et ensuite les transmette aux élèves. Pouvoir se référer à un document existant l'aurait aidé à construire ses séquences et lui aurait fait gagner du temps « je suis bien au clair avec la matière à enseigner mais je ne trouve pas que mon matériel soit au top » (décembre 2018). « Pas facile d'amener cette matière, puis de raconter, de rendre les élèves acteurs, et en même temps de gérer le groupe et les interactions » (décembre 2018).

Une toute autre information qui ressort de ce journal est la satisfaction d'évoluer avec les élèves et la motivation que cette nouvelle manière de faire amène à l'enseignante. « Je suis contente, je commence à gérer ces moments de racontage » (décembre 2018). S'approprier ces nouvelles notions mathématiques et pouvoir les transmettre ensuite est un challenge pour l'enseignante. « Malgré mes doutes sur la qualité pédagogique de mes séquences, j'ai beaucoup de plaisir à partager mes recherches avec les élèves » (décembre 2018). « Je suis beaucoup plus explicite dans mon enseignement » (janvier 2019). Il est intéressant de relever que le travail sur l'histoire de mathématiques lui a réellement donné accès à une compréhension plus large de la matière mathématique qu'elle enseigne.

Finalement, l'enseignante observe des améliorations en numération pour tous les élèves de sa classe, même pour ceux qui ne font pas partie de la recherche. « Je suis épatée par les progrès de D. » « Z. a maintenant compris le surcomptage et l'utilise dans les additions de petites quantités, c'est génial » « Z. ordonne des nombres jusqu'à 25, alors qu'elle allait à peine jusqu'à 16 au début des séquences » (décembre 2018). Les raisons de ces progrès sont

difficiles à interpréter. Sont-ils en lien direct avec les séquences ? Sont-ils le résultat de la motivation de l'enseignante ? Est-ce l'attention qu'elle porte à cette matière qui pourrait avoir des retombées positives sur les élèves ? Ou est-ce une progression normale de ce groupe d'enfants ?

S'il est difficile d'émettre un avis tranché sur ces questions, on peut tout de même soulever les progrès des élèves en numération, de manière globale, ainsi que les observations de l'enseignante sur la clarté de son propre enseignement qui semble dès lors plus explicite grâce aux recherches faites sur l'histoire des mathématiques en lien avec les apprentissages des élèves.

6. DISCUSSION GENERALE

Les résultats de cette recherche montrent que les compétences en numération et en arithmétique des élèves se sont sensiblement améliorées durant les deux mois où l'histoire des mathématiques a été introduite en classe. Sur les 14 mesures, 13 scores ont augmenté entre le début et la fin des tests et un seul est resté identique.

On peut penser qu'il y a un lien entre ces améliorations et les apprentissages faits au travers de certaines séquences sur l'histoire des mathématiques. En mettant en parallèle la théorie de la phylogenèse / ontogenèse développée dans le chapitre sur l'histoire des mathématiques (3.1.) et certaines données de ce travail, on observe des résonnances. Les résultats obtenus ici peuvent être mis en lien avec la double échelle de temps, celle de l'évolution des espèces et en particulier de l'homme et celle de l'évolution du bébé jusqu'à l'âge adulte (Houdé, 2019). L'analyse de cette recherche montre que les séquences sur les premiers essais de l'homme en matière de dénombrement et de comptage sont plutôt utiles pour l'élève qui se situe dans les premiers apprentissages en mathématiques. Par contre, les séquences sur le passage de la quantité aux symboles et sur l'origine des chiffres arabes et du zéro ainsi que sur la valeur positionnelle des chiffres semblent plutôt utiles aux deux élèves plus avancés dans les connaissances mathématiques. Le rapprochement entre l'évolution et le développement tel qu'évoqué par Houdé (2019, p.229) comme « une forme d'histoire des sciences (dont l'enfant est l'acteur principal) qui s'opère en un raccourci saisissant (à peine vingt ans) » est un élément que cette recherche peut illustrer.

Il faut toutefois tenir compte des limites de ce travail, mené sous forme d'une étude de cas, et donc rapportant des résultats liés à un nombre restreint d'élèves. Ce devis expérimental ne permet bien entendu pas de tirer des conclusions généralisables à large échelle. Il serait intéressant de reprendre le même dispositif mais d'élargir le nombre de participants et de cibler une seule tranche d'âge pour obtenir, peut-être, des résultats plus probants.

A propos du devis à lignes de base multiples et mesures répétées, la stabilité des compétences avant l'introduction des séquences, requise dans cette méthodologie, n'a pas pu être respectée dans cette étude. Par manque de temps, les séquences ont été introduites avant la stabilité de toutes les compétences. Une prolongation de ce travail pourrait être d'utiliser ce même devis mais en faisant passer plus de tests, sur un laps de temps plus long, afin d'avoir des résultats plus fiables.

Un autre écueil de cette recherche est qu'il a été compliqué de faire un test après chaque séquence. Comme prévu dans la méthodologie de ce travail, chaque séquence aurait dû être

suivie d'un test. Concrètement, cela n'a pas été possible. En effet, la vie de la classe et du collège, les absences des élèves et les urgences de la réalité du terrain n'ont pas permis de mener tous les tests initialement prévus pour cette recherche. Néanmoins, en prenant en compte le fait que l'apprentissage se fait petit à petit et pas uniquement après une séquence d'enseignement, on peut considérer que cette situation n'annule pas l'intérêt des résultats présentés ici.

Une autre faiblesse de cette étude est liée au test de numération lui-même qui, bien que longuement réfléchi, n'est pas un outil standardisé. Il y a d'ailleurs eu une évolution entre les premières passations du test et les dernières. Au début, l'enseignante pouvait mettre passablement de temps à effectuer cette tâche (environ 25 minutes par élève). Au fur et à mesure, la passation a été plus rapide et plus simple (environ 10 à 15 minutes). Le processus est même devenu limpide après quelques passations. Pour éviter une habituation aux exercices, il a fallu modifier les données de chaque domaine sans pour autant en modifier les attentes de base. Il n'est pas exclu que ceci ait biaisé certains résultats car en dénombrant des quantités diverses, en manipulant des nombres différents d'une fois à l'autre, il se peut qu'un élève ait été déstabilisé sur un test et au contraire en confiance sur le suivant. Prenons par exemple le nombre 1010, qui lors de l'épreuve de transcodage a ébranlé les deux élèves. Il a été remplacé par 1100 lors de la passation suivante et cela a paru plus évident à écrire. On peut imaginer que ce genre de modifications puisse avoir un impact non négligeable sur les résultats.

Les sept passations du test ont permis d'évaluer les élèves sur une relativement longue période, à différents moments de la journée et de la semaine, afin d'éviter de se baser uniquement sur un système de pré-test / post-test non-valide dans des études de cas. Le devis à lignes de base multiples et mesures répétées a l'avantage de prendre des mesures sur un moyen terme et de se baser sur plusieurs prises. Par contre, le phénomène d'habituation ne peut être écarté dans ce travail. En effet, l'attitude des élèves a évolué. Ils étaient plus détendus et plus efficaces au fur et à mesure des tests, la pression de faire juste ou faux ayant disparu et les attentes étant plus claires pour eux. C'est d'ailleurs une observation de l'enseignante qui sent même que, faire à répétition ce type de test, pourrait être en soi une forme d'apprentissage. « J'ai l'impression que de passer le test de numération plusieurs fois aide les élèves à mieux y parvenir [...] Parfois, j'ai l'impression qu'ils apprennent plus en faisant et refaisant le test que lors des séquences » (journal de bord, décembre 2018). Le phénomène d'habituation ne peut donc pas être écarté et il est à prendre en compte dans l'interprétation des résultats. L'automatisation de certains exercices pourrait aussi être responsable de la progression des participants.

Ceci est également valable lors de la manipulation du matériel pour la représentation analogique qui, selon l'interprétation des résultats, est un facteur aidant à l'écriture et à la lecture de nombres. Ainsi, comme le propose Charnay, la construction du concept de nombre passe par la composante langage (activités de transcodage). Cette manière de travailler sur le nombre pour se le représenter a montré ici son efficacité « la capacité à passer d'un mode de représentation à un autre est une marque des progrès réalisés par les élèves dans leur maîtrise des nombres » (Charnay, 2013, p.20). Le transcodage est une compétence qui s'est, dans les trois cas, améliorée. S'il est difficile de faire un lien direct avec les séquences sur l'histoire des mathématiques, il ressort de l'analyse que le fait d'exercer le transcodage avec la représentation analogique, de manière concrète et régulière, a permis une amélioration rapide de l'écriture et de la lecture de nombres, en particulier de grands nombres. Construire la quantité 1207, la faire correspondre à un nombre écrit, ou à un mot-nombre a été une étape éclairante pour les deux élèves de niveau 5H.

En ce qui concerne le questionnaire sur le sens que les élèves donnent aux mathématiques, la présentation de divers systèmes de numération a permis aux élèves niveau 5H d'observer l'existence des nombres autour d'eux et de faire émerger des représentations plus larges, liées aussi aux notions de mesure et de temps. Malgré cela, on constate que les représentations que les élèves ont de « faire des mathématiques », de manière plus générale, sont profondément liées au fait de faire des fiches et de faire des calculs, que ce soit à l'école ou à la maison. Il serait intéressant de pouvoir prolonger ces observations par une activité de terrain pour récolter et répertorier tous les nombres aperçus dans la rue, dans l'école ou à la maison afin d'en comprendre la signification et élargir peut-être les représentations des élèves.

Pour terminer, on peut relever une remarque du journal de bord : « je suis beaucoup plus explicite dans mon enseignement » (janvier 2019). Passer par l'histoire des mathématiques a permis à l'enseignante d'avoir une représentation différente des concepts qui y sont liés.

> Il est par exemple important de comprendre comment et pourquoi la numération décimale s'est imposée comme système de représentation et d'organisation des nombres. Cela peut permettre de mieux appréhender les transpositions didactiques de ce savoir, mais aussi d'interpréter de manière plus efficace les difficultés d'apprentissage des élèves. (Dias, 2018, p.103)

C'est une observation clairement faite dans ce travail : connaître les étapes faites par l'homme pour arriver à compter, à dénombrer, puis à choisir un seul système de numération permet de mieux comprendre les erreurs des élèves et d'avoir plus de recul pour enseigner cette matière.

7. CONCLUSION

L'objectif de cette recherche était donc de vérifier si des séquences d'enseignement sur l'histoire des mathématiques en classe spécialisée amènent du sens à cette branche et améliorent les compétences des élèves en numération et en arithmétique. Si ce travail ne permet pas de confirmer de manière certaine notre hypothèse de base, il nous a néanmoins permis de comprendre les enjeux de cette thématique encore peu étudiée en pédagogie.

Nous pouvons tirer trois conclusions suite à ce travail :

- Tout en tenant compte des différentes limites méthodologiques évoquées plus haut, le présent travail suggère que les compétences des élèves en numération et en arithmétique se sont légèrement améliorées consécutivement aux séquences sur l'histoire des mathématiques. Les résultats observés auprès des trois participants de cette recherche sont tout-à-fait encourageants.
- Utiliser l'histoire des mathématiques comme outil pédagogique, aussi avec des élèves de classe spécialisée, permet d'amener un éclairage historique intéressant et original. L'histoire des mathématiques n'est pas réservée aux élèves de cycle 3 mais a aussi du sens, si l'outil est adapté, avec des élèves plus jeunes ou ayant des difficultés d'apprentissage.
- Connaître l'histoire des mathématiques permet à l'enseignant d'être plus explicite, plus efficace dans sa pratique professionnelle et lui donne des pistes pour comprendre les erreurs des élèves et trouver des remédiations adéquates.

Ces pistes nous incitent à continuer à chercher ou à créer des outils pour les élèves, en particulier pour les jeunes élèves et les élèves de classe spécialisée qui ont besoin de contenus explicites.

> La seule stratégie raisonnable d'enseignement des mathématiques me paraît passer par un enrichissement progressif de l'intuition des enfants, en s'appuyant sur leurs talents précoces pour la manipulation des quantités et le comptage. […] Il s'agit presque de retracer, dans le cerveau de chaque élève, l'histoire des mathématiques et de ses motivations. (Dehaene, 2010, p.266)

8. BIBLIOGRAPHIE

8.1. Ouvrages (livres et articles)

Barbin, E. (1997). Histoire et enseignement des mathématiques : Pourquoi ? Comment ? *Bulletin AMQ*, *37*(1), 20-25.

Cauvet, N. & Reznikou, P. (2012). *Compter le monde : la naissance des nombres*. Paris: Ed. Belize.

Charnay, R. (2013). *Comment enseigner les nombres entiers et la numération décimale ? : de la PS au CM2*. Paris : Hatier.

Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin. (2010). *Plan d'études romand : cycle 1 et 2*. Neuchâtel : CIIP.

Dehaene, S. (2010). *La bosse des maths : quinze ans après* (Nouv. éd rev. et augm). Paris : Jacob.

Dehaene, S. & Cohen, L. (1995), Towards an anatomical and functional model of number processing. *Mathematical cognition 1 (1)*, 83-120.

Dias, T. (2018). Enseigner les mathématiques à l'école : une démarche positive pour des apprentissages réussis. Paris : Ed. Magnard.

D'Esclaibes, N. & D'Esclaibes, S. (2018). *L'histoire des nombres*. Paris : La librairie des écoles.

Fayol, M. (2018). *L'acquisition du nombre* (3e éd.). Paris : Presses universitaires de France.

Fayol, M. (2004). Préface. In Crahay, M. (Éd.). (2005). *Enseignement et apprentissage des mathématiques : que disent les recherches psychopédagogiques* (p.5). Bruxelles : De Boeck.

Fuson, K.C., Richards, J. & Briars, D.J., (1982). The acquisition and elaboration of the number word sequence. In C.J. Brainerd (Ed.), *Children's logical and mathematical cognition : Progress in cognitive development research* (33-92). New York : Springer Verlag.

Fuson, K. C. (1991). Relation entre comptage et cardinalité chez les enfants de 2 à 8 ans. In J. Bideaud, C. Meljac, J.-P. Fischer (Ed.). (2016). *Les chemins du nombre* (pp.159-179). Lille : Presses universitaires de Lille.

French, V. & Collins, R. (2001). *De zéro à dix : l'histoire des chiffres*. Paris : Gautier-Languereau.

Gagnon, Y.-C. (2012). *L'étude de cas comme méthode de recherche* (2e éd). Sainte-Foy : Presses de l'Université du Québec.

Gelman, R. & Gallistel, C. R. (1978). *The child's Understanding of Number*. Cambridge, Massachusetts & London : Harvard University Press.

Guedj, D. (1996). *L'empire des nombres*. Paris : Gallimard.

Hauser, M.D., MacNeilage, P. & Ware, M. (1996). Numerical representations in primates. *PNAS USA 93*, 1514-1517.

Houdé, O. (2019). *Comment raisonne notre cerveau*. Paris : Que sais-je ?

Ifrah, G. (1994). *Histoire universelle des chiffres*. Paris : Seghers.

Ifrah, G. (1985). *Les chiffres, ou, L'histoire d'une grande invention*. Paris : R. Laffont.

Karsenti, T. & Savoie-Zajc, L. (Éd.). (2011). *La recherche en éducation : étapes et approches* (3e éd). Sherbrooke : Ed. du Renouveau Pédagogique Inc.

Lanovaz, M.J. (2013), l'utilisation de devis expérimentaux à cas unique en psychoéducation. *Revue de psychoéducation, 42 (1*), 161-183.

Le Cam, M., Colmant, M. (2016). TIMSS 2015 mathématiques et science. Evaluation internationale des élèves CM1. *Note d'information DEPP*, 33, 1-4.

Le Cam, M., Salles, F. (2016). Les performances des élèves de terminales S en mathématiques, évolution sur vingt ans. *Note d'information DEPP*, *35*, 1-4.

Meljac, C. (2011). *Qui donc a inventé les mathématiques ?* Paris : Editions du Petit A.N.A.E.

Nessmann, P., Zeitoun, C. & Allen, P. (2010). *Les chiffres et les lettres en 35 expériences*. Paris : Mango jeunesse.

Québec (Province) & Ministère de l'éducation, du loisir et du sport. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise : éducation préscolaire, enseignement primaire*. Québec : Ministère de l'éducation, du loisir et du sport.

Van Nieuwenhoven, C., Grégoire, J. & Noël, M.-P. (2001). *Test diagnostique des compétences de base en mathématiques TEDI-MATH.* Paris : ECPA

Wynn, K. (1992). Addition and substraction by Human infants. *Nature (london) 358,* 749-750.

8.2. Sites internet

Charbonneau, L. (2006). *Histoire des mathématiques et les nouveaux programmes au Québec : un défi de taille*. Document repéré à http://emf.unige.ch/files/5114/5389/0047/EMF2006_GT3_Charbonneau.pdf

IREM, (2008). *Eléments d'histoire des mathématiques et de culture pour les classes*. Document repéré à https://irem.univ-poitiers.fr/irem/ressourc/histoire_math_college/index.htm

Ministère de l'éducation nationale et de la jeunesse. (2015). *Le Socle commun des connaissances, des compétences et de culture*. Bulletin officiel (17) Document repéré à https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=87834

Vinais, M. (2010). *Evaluation diagnostique en mathématiques EVALDIM*. Document repéré à https://vinais-marignac.fr/michelvinais/pdf.michelvinais/itemsevaldim.pdf

9. ANNEXES

Annexe 1 : test de numération 3H

Test de performance en numération 3H

1. Comptage :

1.a. Comptage le plus loin possible : _____ (arrêter à 50)

1-19 : 1pt /20-29 : 2 pts / 30-39 : 3 pts / 40-50 : 4 pts ____/4

1.b. Comptage avec une borne supérieure et inférieure

(de 15 à 25) _____ / 1

1.c. Comptage à rebours (de 11 à 8) _____ / 1

2. Compréhension du système numérique :

2.a. Reconnaissance de chiffres (signes) : _____ /2

½ pt. j'aimerais que tu me dises si ce sont des chiffres ou pas (4 items)

0 3 & 7 N ^

2.b. Comparaison de nombres arabes (cartes) : _____ /2

½ pt : je vais te montrer 2 nombres, j'aimerais que tu me dises lequel est le plus grand (le plus petit)

20 /15 31/13 49/48 25/35

2.c. Décision numérique orale : _____ /2

Est-ce que les mots suivants servent à compter ?

½ pt : dimanche - onze - deuzante - juillet - sizante - trente - jeudi - cinq

3. Dénombrement :

3.a. Dénombrement de figures linéaires (15 jetons) : ___ /2

1pt. Peux-tu compter tous les jetons (terme à terme ? organisation)?

1pt. Combien y en a-t-il en tout (recomptage) ?

3.b. construction de 2 collections numériques équivalentes (cardinalité) : _____ / 2

1pt. Donne-moi (15) jetons. Puis je dispose plus ou moins de jetons à côté.

1pt. Où y en a-t-il le plus (sans tout recompter) (recomptage) ?

3.c. Utilisation fonctionnelle du dénombrement (anticipation) : _____ / 2

1pt. J'ai mis une assiette pour chaque invité. Peux-tu aller chercher le bon nombre de gobelets (11) ?

1pt. Peux-tu aller chercher les gobelets nécessaires s'il y a 5 invités en plus ?

4. Transcodage :

4.a. Ecriture de nombres sous dictée : ____ / 2

½ pt : 4 30 13 40

4.b. Lecture à voix haute de nombres arabes : ____ / 2

½ pt : **8 12 47 14**

4.c. lien entre nombre oral et nombre analogique : ____ /2

1pt : voilà une représentation d'un nombre (13). Combien vois-tu ?

1pt : et peux-tu effectuer la représentation de 17 ?

4.d. lien entre chiffre arabe et représentation analogique : ___/2

1pt : étiquette « 10 » : peux tu représenter ce nombre avec le matériel ?

1 pt : combien est représenté avec le matériel (14)? Ecris-le

Annexe 2 : test de numération 5H

Test de performance en numération et en arithmétique : 5H

1. Comptage :

1.a. Comptage le plus loin possible : _____ _____ / 4

1-50 :1pt/50-101 : 2pts / 101-1001 : 3 pts / 1001-2001 : 4 pts

1.b. Comptage avec une borne supérieure et inférieure (comptage de…à …) : 189 à 210 _____ / 1

1.c. Comptage de saut en saut (de 2 en 2, de 5 en 5) _____ /1

2. Compréhension du système numérique :

2.a. Reconnaissance de chiffres (signes) : _____ /2

½ pt. J'aimerais que tu me dises si ce sont des chiffres ou pas (4 items)

0 3 & 7 N ^

2.b. Comparaison de nombres arabes (cartes) : _____ /2

½ pt : je vais te montrer 2 nombres, j'aimerais que tu me dises lequel est le plus grand (le plus petit) 343 /434 400/450 600/106 80/40

2.c. Décision numérique orale : _____ /2

Est-ce que les mots suivants servent à compter ?
½ pt : dimanche - onze - deuzante - juillet - sizante - trente - jeudi - cinq - dix-six - deux (4 items)

3. Dénombrement :

3.a. Dénombrement de figures linéaires (50 jetons) : ___ /3

1pt. Peux-tu compter tous les jetons (terme à terme ? organisation)?

1pt. Combien y en a-t-il en tout (recomptage) ?

1pt. Combien y en a-t-il si tu avais commencé par celui-là ?

3.b. construction de 2 collections numériques équivalentes (cardinalité) : _____ / 3

1pt. Peux tu mettre autant de jetons sur la table (37) ?

1pt. Où y en a-t-il le plus, sans tout recompter (recomptage) ?

1pt. si stratégie de groupement par 5 ou par 10

4. Transcodage :

4.a. Ecriture de nombres sous dictée : ____ / 2

½ pt : 73 1010 150 170 951 80 14 200

4.b. Lecture à voix haute de nombres arabes : ____ / 2

½ pt : **170 1004 567 102 400 1200 92 84**

4.c. lien entre nombre oral et nombre analogique : ____ /2

1pt : voilà une représentation d'un nombre (57). Combien vois-tu ?

1pt : peux-tu représenter 77 ?

4.d. lien entre chiffre arabe et représentation analogique : ___/2

1pt : étiquette « 63 » : peux-tu représenter ce nombre avec le matériel ?

1 pt : combien est représenté avec le matériel (88) ? Ecris-le

5. Arithmétique :

5.a. Calcul mental : ___ /3

1 pt : effectue cette addition en ligne, de tête : 42 + 35 =

1 pt : et celle-ci : 155+14 =

1 pt : et cette dernière : 45 + 37 =

5.b. Calcul en colonne : ___/3

1 pt : effectue cette addition en colonne : 42 + 30 =

1 pt : et celle-ci : 162+5 =

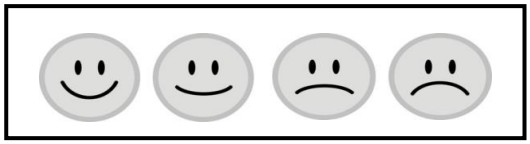
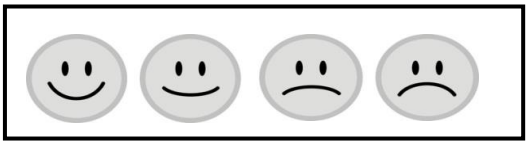
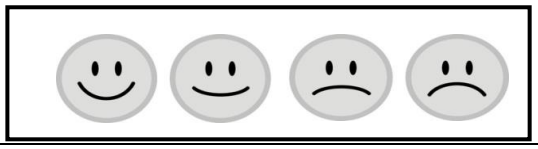
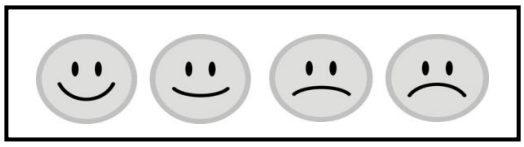
1 pt : et cette dernière : 69 + 18 =

Annexe 3 : questionnaire sur le sens des mathématiques

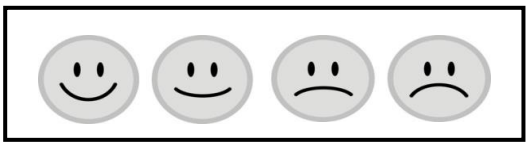
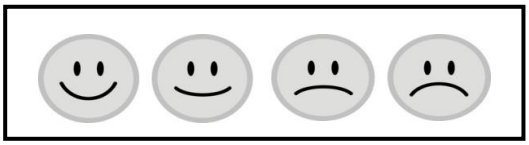
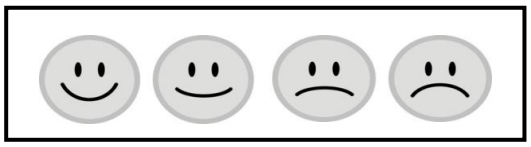
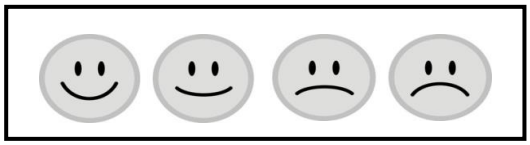
Questionnaire sur le sens des mathématiques :

Inspiré du projet du compteur de Michel Vinais

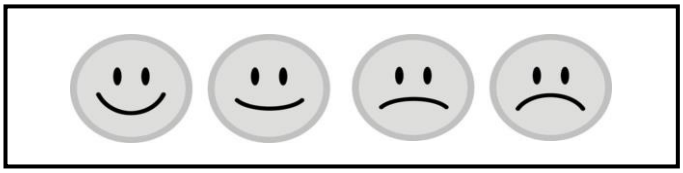
Du Côté du nombre

Peux-tu me donner 4 nombres (oral ou écrit) ?	
A quoi ça sert les nombres ?	
As-tu déjà vu des nombres dans la rue ?	
Si oui : où, lesquels ?	
As-tu déjà vu des nombres dans les jeux ?	
Si oui : où, lesquels ?	
As-tu besoin de compter dans la vie ?	
Si oui, quand ?	
Qu'est-ce que tu as déjà compté ?	

Du côté de la représentation des maths

Aimes-tu les maths ?	
Est-ce que tu fais des maths quand tu n'es pas à l'école ?	
Si oui, quand ?	
As-tu fait des maths aujourd'hui ?	
Est-ce que les maths sont utiles dans la vie ?	
Si oui, à quoi ?	

Code : **toujours souvent parfois jamais**



Annexe 4 : le dénombrement

Séquence d'enseignement 1 : Comment compter sans les chiffres ?

Partie contée :

Il y a fort, fort longtemps, quand les grands-pères et de vos grands-pères n'étaient pas encore nés, les hommes ne savaient pas compter.

Ils vivaient sans se préoccuper de compter les choses.

On sait qu'un jour pourtant, le besoin de « savoir combien » s'est fait ressentir.

A cette époque, les hommes étaient des paysans, des bergers, ils cueillaient des baies, chassaient ou se déplaçaient avec leurs moutons et leurs chèvres.

Pour vérifier l'état de leurs troupeaux, ils ont eu l'idée (géniale !) de faire une encoche, un trait, sur un bout de bois ou sur un os pour savoir s'ils avaient le même nombre de mouton au départ qu'à l'arrivée. Pour chaque mouton vu, ils faisaient une encoche.

Il y a 20 000 ans, un homme venu de l'Est a fait 55 encoches sur un os de loup. Il était déjà un sacré calculateur.

En Europe, on a retrouvé beaucoup d'os ou de bouts de bois qui datent parfois de 35 000 ans.

Les chasseurs ont fait de même, ils emportaient avec eux des os et chaque fois qu'ils tuaient une bête, ils marquaient l'os d'une entaille. Parfois, ils prenaient un os pour marquer la quantité d'ours, un os pour la quantité de cerfs, un os pour la quantité de bisons, … et les plus malins regroupaient les encoches par 5 pour lire plus vite.

C'est ainsi que pour la première fois, les hommes ont compté.

Partie pratique :

Ce bout de bois a été entaillé (l'enseignante sort d'un panier une branche entaillée). Avec ces moutons, constituons le troupeau de ce berger. Pour chaque entaille, posons un mouton sur la table. Le nombre d'entailles correspond au nombre de moutons.

Le soir arrive, un élève va fermer les yeux. Les autres vont prendre le loup et peut-être emporter un mouton. Ou alors, ils vont rajouter un agneau dans le troupeau.

Quand l'élève ouvre les yeux, avec le bois entaillé et uniquement ainsi, il va vérifier ce qui s'est passé durant la nuit.

Est-ce qu'un ou plusieurs moutons ont disparus ? Est-ce qu'un agneau est né ? Nous allons en parler…

Annexe 5 : le comptage par pointage corporel

Séquence d'enseignement 2 : le comptage avec les parties du corps

Partie contée :

Comme nous l'avons vu, les hommes de la préhistoire ont fait des entailles dans des bois ou dans des os pour compter leurs moutons ou leur gibier.

Pour compter, ils ont utilisé leurs mains et leurs doigts. Certains partaient d'une position étendue des doigts et les repliaient, d'autres faisaient le contraire : ils partaient des doigts pliés et les étendaient les uns après les autres. On pouvait aussi ajouter les phalanges, pour aller plus loin que 10 !

Jusqu'à combien ont-ils pu dénombrer ?

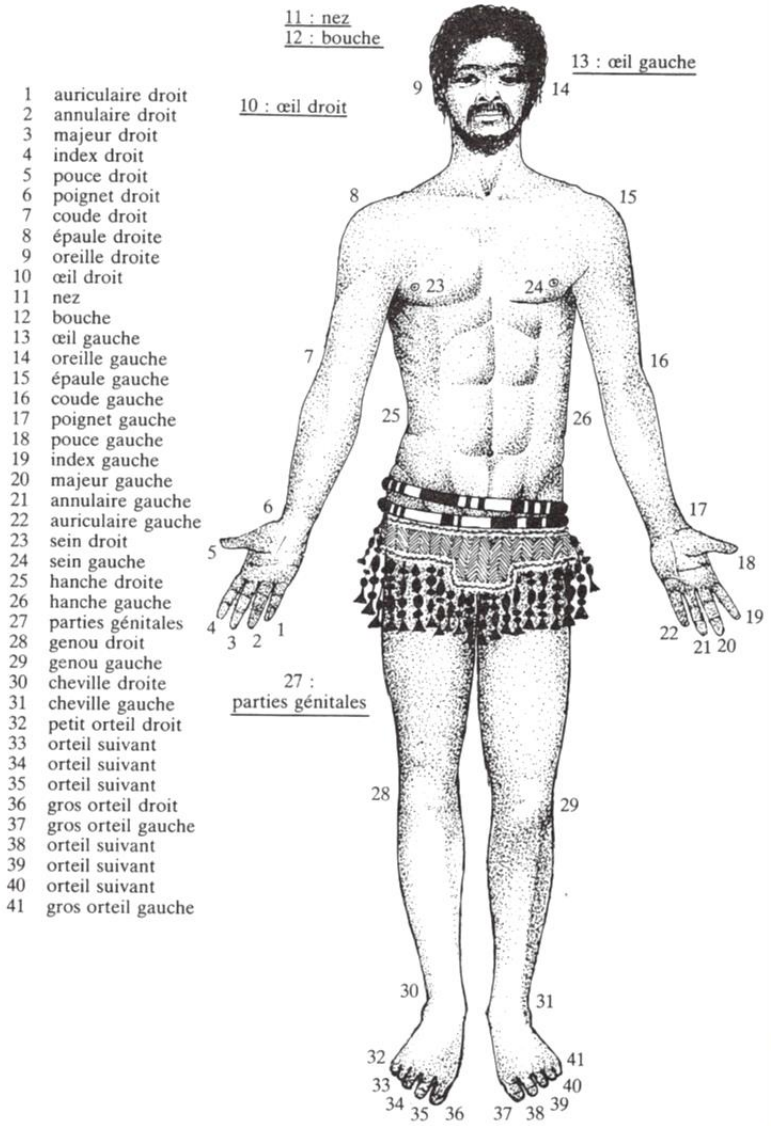
Dans le monde entier, les hommes se sont servis de leurs mains, de leurs doigts mais aussi de leurs orteils et de leur corps tout entier pour compter.

Les chinois ont inventé une méthode pour compter jusqu'à 100 mille sur une main et jusqu'à 10 milliards sur les deux !!!

Regardez cet homme, c'est un homme de Papouasie. On voit sur l'image par quel chemin il dénombre les objets… par exemple, pour dire 6, il montre le poignet, pour dire 11, il montre son nez…

Partie pratique :

Observons cette image et commençons à compter comme un Papou… (comptage ensemble de 1 à 41) avec un agrandissement de l'image ci-dessous.



Le corps humain : origine de l'arithmétique (technique corporelle employée par les Papous de La Nouvelle-Guinée).

Maintenant, pouvez-vous me donner ceci (je pointe mon pouce gauche) de billes ? Et ceci (je montre mon épaule) de billes ?

Il s'ensuit un petit jeu où chacun demande une quantité à un camarade en pointant une partie de son corps (jusqu'à 20).

Annexe 6 : le passage d'une quantité à un symbole

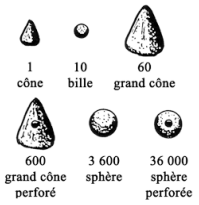
Séquence d'enseignement 3 : passer d'une quantité à un symbole

Partie contée :

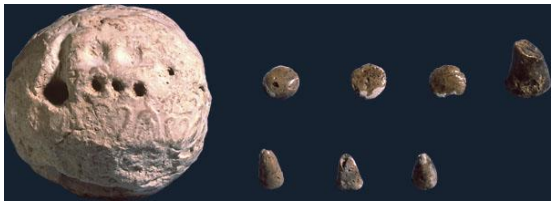
Donc comme nous l'avons vu, les hommes faisaient des traits dans des bois, utilisaient leur corps ou des cailloux pour compter.

Avec le temps, les troupeaux s'agrandissaient et il devenait difficile de faire autant d'entailles que de bêtes. Les sacs de cailloux devenaient trop lourds et les os ou les bois trop petits pour tout marquer.

Représenter chaque objet compté prenait beaucoup trop de place et beaucoup trop de temps. Les Sumériens, un peuple qui vivait il y a plus de 3000 ans vers l'Irak actuelle, cherchèrent un moyen de conserver des grands nombres facilement et avec peu de matériel. Ils ont ainsi inventé des symboles différents pour représenter les nombres importants. Ils ont inventé 6 formes différentes :



Ensuite, ils ont eu l'idée d'enfermer dans une bulle d'argile le nombre de symboles et donc la quantité d'objets ou de bêtes qu'ils voulaient représenter. C'était un bon moyen d'être certain de ne rien perdre ni oublier !



Ils mettaient dans des bulles les symboles représentant la quantité désirée. Essayons… s'ils avaient 5 moutons… que mettraient-ils dans la bulle ? Et 10 ? Ensuite, ils inscrivaient sur la bulle son contenu exact.

Petit à petit, ils se sont rendus compte que cela ne servait à rien d'avoir les symboles à l'intérieur puisqu'ils étaient inscrits sur la bulle…

Ils finirent par juste mettre des signes sur les bulles en argile.

Puis les bulles devinrent plates, et carrées… devenant des tablettes pour écrire.

C'est donc depuis cette découverte que l'humanité rentre dans l'histoire. Avant cela, on parle de la préhistoire. C'est-à-dire que les hommes existaient mais qu'ils n'avaient pas encore inventé l'écriture des lettres et des nombres.

Partie pratique :

Nous allons travailler avec le code suivant :

Un cône = 1 Une bille = 10

Je vais distribuer à chacun un peu de pâte à modeler et des étiquettes nombres. Ce sera à vous de refaire ce nombre à l'aide de cônes ou de billes que vous aurez fabriqués.

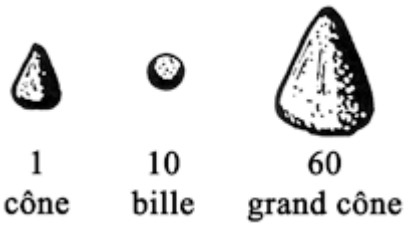
Ensuite, nous mettrons dans une boule plusieurs cônes et plusieurs billes. Nous marquerons le contenu sur la boule, à l'aide d'un bout de bois.

A-t-on vraiment besoin de mettre le nombre de cônes et de billes dans la boule ? Les écritures à la surface suffisent-elles ?

Si j'écrase cette boule, je pourrai mieux écrire ce que j'aurai mis à l'intérieur… et voilà comment sont nés les chiffres… Enfin pas tout-à-fait… ce sont encore des dessins… les chiffres que nous connaissons vont arriver plus tard dans l'histoire…

Prénom : _____

Compter en sumérien :



Dessine les symboles que tu peux utiliser pour représenter :

10 : _____ 70 : _____

3 : _____ 46 : _____

20 : _____ 120 : _____

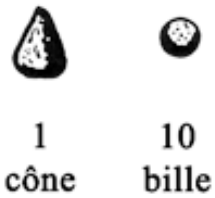
33 : _____ 40 : _____

15 : _____ 28 : _____

Bravo !!! Tu es un vrai calculateur de l'antiquité !!

Prénom : _____

Compter en sumérien :



Dessine les symboles que tu utiliserais pour représenter :

7 : _____ 20 : _____

3 : _____ 16 : _____

2 : _____ 12 : _____

10 : _____ 4 : _____

15 : _____ 23 : _____

Bravo !!! Tu es un vrai calculateur de l'antiquité !!!

Annexe 7 : l'origine des chiffres arabes et du zéro et la valeur positionnelle des chiffres

Séquence 4 : l'origine des chiffres indo-arabes et du zéro

Partie contée :

Comme nous l'avons vu la semaine dernière, pour éviter de transporter de grandes quantités de cailloux, de bois avec des entailles ou d'autres objets pour dénombrer une quantité, certains hommes ont eu l'idée d'utiliser des symboles comme trace. Les sumériens dessinaient des cônes et diverses sortes de cercles pour déterminer le nombre de jarres d'huile ou de moutons qu'ils transportaient (recueil oral des souvenirs des élèves).

Dans plusieurs parties du monde, différents systèmes de numération ont pris forme. Par exemple, les chinois ont utilisé les symboles suivants :

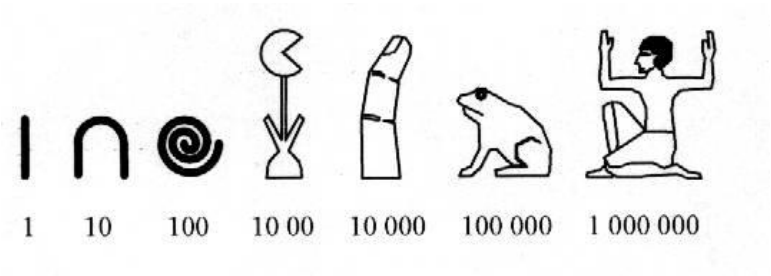
0	零	*ling*
1	一	*i*
2	二	Erh
3	三	San
4	四	Ssu
5	六	Wu
6	五	Liu
7	七	Chhi
8	八	Pa
9	九	Chiu
10	十	Shih
100	百	Pai
1000	千	Chhien
10000	万	wan

Voilà un autre système. Savez-vous qui a inventé ces symboles pour compter ? Les avez-vous déjà vus quelque part (horloges, pages de livres, pierres datées…)

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
1	2	3	4	5	6	7	8	9
X	XI	XII	XX	XXX	XL	L	LX	
10	11	12	20	30	40	50	60	
LXX	LXXX	XC	C	D	M			
70	80	90	100	500	1000			

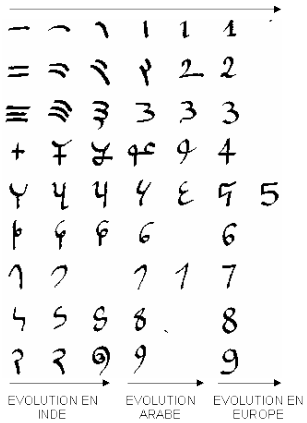
Ce sont les Romains qui ont inventé ce système de numération. Chez nous, c'est le système qui a été utilisé durant des milliers d'années. Pourquoi l'a-t-on abandonné à votre avis ? (difficulté de calculer avec ces signes)

Et le système suivant vous dit-il quelque chose ?



Les Égyptiens ont aussi utilisé des dessins pour représenter les nombres. Ils ont observé la nature autour d'eux, le Nil, les fleurs de lotus et les têtards, et les ont utilisés pour représenter des nombres. Les Égyptiens ont réuni ces images pour pouvoir lire facilement un très grand nombre.

Et voilà encore un système… est-ce que vous y voyez quelque chose de connu ? (montrer uniquement la colonne de gauche)



Je vais vous montrer les colonnes suivantes… Voilà donc les ancêtres de nos chiffres (de 1 à 9). Ils sont nés en Inde il y a 4 mille ans. Ensuite, les arabes ont utilisé l'idées des indiens et ont amené ces chiffres chez nous.

Si on compare les chiffres indiens et les chiffres romains : que peut-on en dire ?

(le système romains est un système plus compliqué/ les grands nombres s'écrivent petit/ difficultés à additionner/…)

Petit à petit, le système indien a pris le dessus sur les autres et il est maintenant utilisé dans presque tous les pays du monde. Avec 9 symboles, on peut écrire des nombres jusqu'à l'infini… incroyable non ?

En fait, nous utilisons 10 symboles… lequel n'est pas sur le tableau ??? le Zéro !

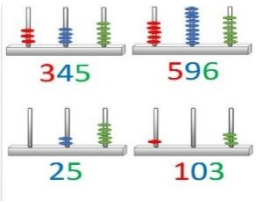
Effectivement, zéro a été inventé plus tard… l'idée de dessiner un signe pour dire qu'il n'y a rien est venue il y a 2000 ans, et ce sont aussi les savants indiens qui ont imaginé cela.

Partie pratique (présentation d'un boulier) :

Observons cet objet… c'est un boulier. Il a longtemps servi et sert encore à dénombrer des quantités. Chaque tige représente un type de nombre : les unités (à droite), les dizaines, les centaines et tout à gauche les milliers. Si je mets deux jetons sur chaque tige, combien vais-je obtenir ? (Observation que le même chiffre, positionné différemment, ne vaut pas la même chose). Chacun va venir construire un nombre et nous allons le deviner ensemble.

Donc nous avons vu que selon où on place un chiffre dans un nombre, sa valeur change. (2/20/200). Nous avons aussi vu que le 0 sert à indiquer qu'il n'y a rien.

Je vais vous donner un boulier pour 2 élèves. Vous allez placer 4 billes sur chaque barre du boulier. Quel est le nombre représenté ?



Pouvez-vous représenter les nombres suivants ?

(différenciation 3H e 5H)

Maintenant par deux, chacun va à son tour dicter nombre à son camarade. De manière orale puis de manière écrite.

Avec les deux élèves de 5H, nous allons faire quelques additions, sans retenues, puis avec.